

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021-2022



Physique et sciences de l'ingénieur 4

HA8402H - PeiP Polytech Montpellier

Kenneth MAUSSANG

Version du 23 décembre 2021

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Pas de modification 4.0 International”.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

Table des matières

I. Les équations de Maxwell	7
1. Rappels d'analyse vectorielle	7
1.1. Notion d'opérateurs vectoriels	7
1.2. Équations de Maxwell	9
2. Charges et courants	9
2.1. Densité volumique de charge	9
2.2. Densité volumique de courant	10
2.3. Conductivité électrique	10
2.4. Symétries	10
3. Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday	11
3.1. Potentiel électrostatique V	11
3.2. Surface équipotentielle	12
3.3. Effet de pointe - pression électrostatique	13
3.4. Théorème de Stokes	13
4. Maxwell-Gauss et électrostatique	15
4.1. Équation de Poisson et loi de Coulomb	15
4.2. Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss	15
5. Structure du champ magnétique	16
5.1. Sources de champ magnétique	16
5.2. Conservation du flux magnétique	17
6. Maxwell-Ampère et magnétostatique	17
6.1. Loi de Biot et Savard	17
6.2. Théorème d'Ampère	18
7. Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)	19
7.1. Définition	19
7.2. Equations de Maxwell dans l'ARQS	20
Compléments au chapitre <i>Les équations de Maxwell</i>	21
1. Energie électrostatique	21
2. Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)	21
3. Jean-Baptiste Biot (1774-1862) et Félix Savart (1791-1841)	23
4. James Clerk Maxwell (1831-1879)	24
5. Effet corona	25
6. Feu de Saint-Elme	26
7. Propulsion électrostatique (SEP)	28
8. Champ magnétique terrestre	28
II. L'induction et l'énergie magnétique	31
1. Introduction	31
1.1. Force de Laplace	31
1.2. Constatations expérimentales	31
2. Maxwell-Faraday en dynamique	32
2.1. Loi de Faraday	32
2.2. Principe de l'alternateur	33
3. Induction : circuit mobile dans un champ fixe	33
3.1. Force exercée sur un circuit mobile dans un champ fixe	33
3.2. Travail des forces de Laplace	34

Table des matières

4. Autoinduction	34
5. Énergie magnétique dans une bobine	35
Compléments au chapitre <i>L'induction et l'énergie magnétique</i>	37
1. Actionneurs électromécaniques	37
2. Expérience historique de Faraday	37
3. Principe de l'alternateur	37
4. Centrales électriques	39
5. Nikola Tesla	41
6. Bougies d'allumage des moteurs thermiques	45
7. Exemple de couplage électromécanique : le haut-parleur	47
7.1. Description	47
7.2. Équation mécanique	48
7.3. Équation électrique	49
7.4. Conversion électromécanique	49
7.5. Impédance motionnelle	50
8. Les microphones	51
9. Echauffement par induction	52
10. Transfert d'énergie électrique sans contact	55
11. Moteurs	57
11.1. Machines électriques	57
11.2. Moteurs électriques	58
11.3. Bogie de TGV	60
III. Ondes électromagnétiques dans le vide	63
1. Des équations de Maxwell à l'équation de D'Alembert	63
2. L'Onde Plane Progressive Monochromatique	64
2.1. Définition	64
2.2. Aspect ondulatoire, propagation	65
2.3. Généralisation	65
3. Structure de l'onde plane	66
3.1. Équations de Maxwell	66
3.2. Structure spatio-temporelle de l'onde	66
4. Polarisation des ondes	67
4.1. Définition	67
4.2. Polarisation rectiligne	68
4.3. Polarisation circulaire droite - circulaire gauche	68
4.4. Polarisation elliptique	69
4.5. Polariseur	69
5. Énergie d'une onde électromagnétique	71
5.1. Conservation de l'énergie électromagnétique	71
5.2. Flux lumineux et vecteur de Poynting	73
5.3. Interprétation corpusculaire	73
IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux	75
1. Propagation dans un milieu matériel	75
1.1. Cas d'un conducteur	75
1.2. Propagation dans un milieu diélectrique	78
2. D'un milieu à un autre : réflexion	80
2.1. Relations de passage du champ	80
2.2. Réflexion sur un miroir métallique	81
2.3. Ondes stationnaires	82

2.4. Bilan énergétique	83
3. Passage entre deux diélectriques : transmission	84
3.1. Incidence normale	84
3.2. Lois de Descartes	85
3.3. Principe de Fermat	86
V. Propriétés des ondes	87
1. Ondes sur une corde vibrante	87
2. Propriétés de l'équation de D'Alembert	89
2.1. Solution générale	89
2.2. Linéarité	90
2.3. Interférences et ondes stationnaires	90
3. Ondes sonores	90
Compléments au chapitre <i>Propriétés des ondes</i>	93
1. Impédances	93
2. Réflexion et transmission	93
VI. Optique géométrique	97
1. Propriétés des rayons lumineux	97
1.1. Notion de chemin optique	97
1.2. Principe de Fermat	97
1.3. Notion de système optique	97
2. Relations de conjugaison de systèmes optiques simples	99
2.1. Cas du miroir plan	99
2.2. Cas du dioptré plan	99
2.3. Cas du dioptré sphérique	100
2.4. La lentille mince	101
2.5. Construction géométrique dans le cas d'une lentille convergente	103
2.6. Construction géométrique dans le cas d'une lentille divergente	107
3. Instruments d'optiques	108
3.1. Détermination de la focale d'une lentille	108
3.2. La loupe	109
3.3. Le microscope	110
3.4. La lunette astronomique	112
Compléments au chapitre <i>L'induction et l'énergie magnétique</i>	114
1. Quelques instruments d'optique (Cyclopaedia, 1728)	114
2. Lentille de Nimrud	115
VII. Interférences et spectroscopie	117
1. Diffraction des ondes lumineuses	117
2. Interférences entre deux ondes lumineuses	119
2.1. Définition	119
2.2. Conditions d'observation des interférences	119
2.3. Interférences à deux ondes	121
3. Exemple de dispositif interférométrique : les fentes d'Young	124
4. Interférences à N ondes - spectroscopie	126
4.1. Réseau	126
4.2. Influence du nombre de fentes éclairées	127
4.3. Spectromètre à réseau	128

Table des matières

Compléments au chapitre <i>Interférences et spectroscopie</i>	131
1. Franges d'égales épaisseurs en lumière blanche	131
2. Expérience des fentes d'Young en lumière monochromatique	131
3. Expérience des fentes d'Young en lumière blanche	132
4. Exemple d'application des interférences : visualisation d'écoulements en soufflerie.	132
5. Lumière blanche à travers un réseau de diffraction.	133
6. Décomposition d'un faisceau lumineux par un réseau.	133
7. Applications de la spectrométrie	134
8. Théorie élémentaire de la diffraction	134
8.1. Principe de Huygens-Fresnel	134
8.2. Figure de diffraction d'une fente rectangulaire.	137
8.3. Théorème de Babinet.	138
8.4. Diffraction par un ensemble de structures	139
8.5. Applications en cristallographie.	140
A. Références	145
1. Les équations de Maxwell	145
1.1. Références bibliographiques	145
1.2. Ressources en ligne	145
2. L'induction et l'énergie magnétique	145
2.1. Références bibliographiques	145
2.2. Ressources en ligne	146
3. Ondes électromagnétiques dans le vide	146
3.1. Références bibliographiques	146
3.2. Ressources en ligne	146
4. Ondes électromagnétiques dans les milieux	147
4.1. Références bibliographiques	147
4.2. Ressources en ligne	147
5. Propriétés des ondes	147
5.1. Références bibliographiques	147
5.2. Ressources en ligne	147
6. Optique géométrique	147
6.1. Ressources en ligne	148
7. Interférences et spectroscopie	148
7.1. Références bibliographiques	148
7.2. Ressources en ligne	149
B. Contenu du cours	151
C. Acquis de L1 et L2S3	155
D. Outils mathématiques	157
1. Notion de champ	157
2. Contours ou chemins et surfaces	157
3. Circulation et flux	158
3.1. Circulation d'un champ vectoriel	158
3.2. Flux d'un champ vectoriel	159
4. Les opérateurs vectoriels	159
4.1. Le gradient d'un champ scalaire	159
4.2. Divergence d'un champ vectoriel	161
4.3. Théorème de Green-Ostrogradski	162

5. Le rotationnel d'un champ vectoriel	163
5.1. Définition	163
5.2. Théorème de Stokes-Ampère	165
6. Opérateur Laplacien	165

Table des matières

Chapitre I

Les équations de Maxwell

Après les lois de l'électrostatique établies par Coulomb en 1785 et les lois de la magnétostatique établies par Biot et Savart en 1820, Maxwell propose en 1865 un système de quatre équations locales régissant l'électromagnétisme. Par rapport à l'électrostatique et la magnétostatique, les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} ne sont plus indépendants en régime dynamique, ils sont couplés entre eux. Ainsi, une variation spatio-temporelle d'un champ induit une variation de l'autre champ. On ne peut plus traiter les champs de manière séparée. Ce système d'équations, **les équations de Maxwell**, est défini en tout point de l'espace \vec{r} et à tout instant t .

1. Rappels d'analyse vectorielle

1.1. Notion d'opérateurs vectoriels

Les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont des **champs vectoriels**, c'est-à-dire que ce sont des fonctions de l'espace et du temps qui, à tout point de l'espace \vec{r} et à tout instant t , associent une grandeur physique vectorielle : $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ou $\vec{B}(\vec{r}, t)$. On définit également les champs scalaires, qui à tout point de l'espace \vec{r} et à tout instant t associent une grandeur physique scalaire : par exemple, le champ de pression de l'atmosphère terrestre. Pour de telles fonctions de l'espace et du temps (les champs), on peut construire des **opérateurs vectoriels**. On peut distinguer trois types d'opérateurs vectoriels

- les opérateurs qui à un champ vectoriel initial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ associent un champ scalaire $f(\vec{r}, t)$. Par exemple, l'**opérateur divergence**, noté div : $f(\vec{r}, t) = \text{div} \vec{A}(\vec{r}, t)$;
- les opérateurs qui à un champ scalaire initial $f(\vec{r}, t)$ associent un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Par exemple, l'**opérateur gradient**, noté $\overrightarrow{\text{grad}}$: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{r}, t)$;
- les opérateurs qui à un champ vectoriel initial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ associent un champ vectoriel $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Par exemple, l'**opérateur rotationnel**, noté $\overrightarrow{\text{rot}}$: $\vec{B}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(\vec{r}, t)$.

L'opérateur gradient a déjà été vu en mécanique, permettant de relier la force mécanique \vec{f} et son énergie potentielle E_p selon la relation

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p.$$

Considérons un champ scalaire $f(M, t)$, fonction des coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point M de l'espace et du temps t . L'évolution dans le temps du champ en un point donné fait intervenir la dérivée temporelle dont le calcul est immédiat. Notons df la variation élémentaire de f associée à un déplacement élémentaire $d\vec{l}$.

Définition intrinsèque du gradient

Le gradient d'un champ scalaire f est défini par la relation

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l}.$$

L'opérateur gradient s'applique à un champ scalaire qu'il transforme en un champ vectoriel. Cette définition possède un caractère intrinsèque car elle ne fait pas intervenir de système de coordonnées particulier. C'est à cette relation que nous ferons appel pour obtenir l'expression du gradient dans les différents systèmes de coordonnées.

I. Les équations de Maxwell

Expression de l'opérateur gradient dans les différents systèmes de coordonnées

— En cartésiennes

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z,$$

— en cylindriques

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z,$$

— en sphériques

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

Remarque : on utilise souvent l'opérateur symbolique $\vec{\nabla}$, appelé opérateur *nabla* et s'exprimant en coordonnées cartésiennes de la façon suivante

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Cet opérateur agit sur le champ scalaire f , de sorte que son gradient peut s'exprimer à partir de l'opérateur nabla

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f.$$

La définition, mais sans intitulé, de l'opérateur *nabla* a été introduite par William Rowan Hamilton en 1847, et Peter Guthrie Tait en a développé la théorie à partir de 1867. Le nom *nabla* lui fut donné par Tait sur l'avis de William Robertson Smith, en 1870, par analogie de forme avec une harpe grecque qui dans l'antiquité portait ce nom¹ ($\nu\acute{\alpha}\beta\lambda\alpha$, *nábla*). On définit également deux autres opérateurs utiles en électromagnétisme, dont on trouvera les expressions intrinsèques en annexe. Ces deux opérateurs sont la divergence div (qui à un champ vectoriel initial associe un champ scalaire) et le rotationnel rot (qui à un champ vectoriel initial associe un champ vectoriel). Les expressions de ces opérateurs dans les trois principaux systèmes sont données ci-après.

Expression de l'opérateur divergence dans les différents systèmes de coordonnées

— En cartésiennes

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

— en cylindriques

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

— en sphériques

$$\text{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}.$$

Expression de l'opérateur rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

— En cartésiennes

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z,$$

— en cylindriques

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z,$$

1. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Nabla>

— en sphériques

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{a} = & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r a_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi. \end{aligned}$$

1.2. Équations de Maxwell

Équations de Maxwell

En tout point de l'espace et à chaque instant, les champs vectoriels électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} vérifient le système de quatre équations suivant

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{I.1})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{I.2})$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{I.3})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{I.4})$$

où ρ est la densité volumique de charge électrique et \vec{j} le vecteur densité volumique de courant électrique.

Il s'agit des **équations de Maxwell**, les deux premières sont des équations dites *de structure*, alors que les deux dernières sont des équations dites *aux sources* des champs (la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant électrique \vec{j}). L'équation I.2 est dite équation de Maxwell-Faraday, l'équation I.3 est dite équation de Maxwell-Gauss et l'équation I.4 est dite équation de Maxwell-Ampère. Nous verrons plus tard l'origine de ces dénominations.

Remarque : Perméabilité magnétique et permittivité diélectrique du vide.

La perméabilité magnétique du vide μ_0 et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 sont des constantes qui dépendent du système d'unités choisis. Dans le système d'unités international (SI, anciennement MKSA), on a

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{F} \cdot \text{m},$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1},$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1,$$

avec $c = 3 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide.

2. Charges et courants

2.1. Densité volumique de charge

On définit la densité volumique de charge par

$$\rho = \frac{\delta q}{\delta V},$$

I. Les équations de Maxwell

où δq est la charge contenue dans le volume δV . C'est l'équivalent de la masse volumique pour la charge électrique. La densité volumique de charge a pour unité SI le $C \cdot m^{-3}$. À partir de cette densité volumique de charge, champ scalaire de l'espace, on peut calculer la charge Q contenue dans un volume V fini

$$Q = \iiint_V \rho dV.$$

On peut également définir des distributions surfaciques et linéiques, plus adaptées à la modélisation de certaines situations. On définit ainsi

- σ la charge surfacique en $C \cdot m^{-2}$;
- λ la charge linéique en $C \cdot m^{-1}$.

2.2. Densité volumique de courant

On définit la densité volumique de courant \vec{j} comme le courant de déplacement des charges. Si les charges ont une densité volumique ρ et une vitesse \vec{v} , alors

$$\vec{j} = \rho \vec{v},$$

par analogie avec l'hydrodynamique. Soit S une surface orientée, de vecteur normal local \vec{n} . Le courant électrique I traversant la surface S est le flux de \vec{j} à travers la surface S

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS.$$

L'unité SI de \vec{j} est donc le $A \cdot m^{-2}$.

2.3. Conductivité électrique

Un conducteur est un matériau qui permet le déplacement des charges, contrairement à l'isolant qui lui ne le permet pas. On caractérise le matériau par sa conductivité σ , reliant \vec{j} , le vecteur densité de courant électrique, à l'acteur du mouvement des charges, le champ électrique \vec{E}

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Cette relation est appelée **loi d'Ohm locale**. La conductivité est une propriété du matériau, indépendamment de la géométrie. La résistance d'un matériau dépend de la conductivité ET de la géométrie du conducteur. Dans le cas d'un conducteur cylindrique de section S et de longueur l , la résistance de ce conducteur cylindrique vaut

$$R = \frac{l}{\sigma S}.$$

Si σ est faible, on a un isolant, si σ est grand, on a un conducteur.

Quelques ordres de grandeur

matériau	Cu	Fe	Al	Sn	C	SiO ₂
σ ($\Omega \cdot m^{-1}$)	$6 \cdot 10^7$	10^7	$4 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^4$	10^{-17}

2.4. Symétries

En électrostatique et magnétostatique, les symétries des distributions sources impactent directement les structures des champs et notamment leurs propriétés de symétries. Dans le cas du champ électrostatique, tout plan de symétrie de la distribution de charges est un plan de symétrie du champ électrique. Ainsi, en particulier, si M est un point d'un plan de symétrie de la distribution de charges, alors le champ électrique en M est nécessairement contenu dans ce plan de symétrie. De même, tout plan d'antisymétrie de la distribution de charges est un plan d'antisymétrie du champ électrique. Ainsi, en particulier, si M est un point d'un plan d'antisymétrie de la

distribution de charges, alors le champ électrique en M est nécessairement orthogonal à ce plan d'antisymétrie. Dans le cas du champ magnétostatique, tout plan de symétrie de la distribution de courants est un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Ainsi, en particulier, si M est un point d'un plan de symétrie de la distribution de courants, alors le champ magnétique en M est nécessairement orthogonal à ce plan de symétrie. De même, tout plan d'antisymétrie de la distribution de courants est un plan de symétrie du champ magnétique. Ainsi, en particulier, si M est un point d'un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, alors le champ magnétique en M est nécessairement contenu dans ce plan d'antisymétrie.

3. Construction de l'électrostatique à partir de l'équation de Maxwell-Faraday

3.1. Potentiel électrostatique V

Les opérateurs vectoriels ont un certain nombre de propriétés, permettant l'introduction de nouveaux champs.



Champ vectoriel dérivant d'un champ scalaire

Soit U un champ scalaire. On a alors la propriété suivante

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}U) = \vec{0},$$

pour tout champ scalaire U . Inversement, pour un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r}, t)$, on a l'équivalence suivante

$$\forall(\vec{r}, t), \vec{\text{rot}}\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0} \iff \exists U(\vec{r}, t) \mid \forall(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\text{grad}}U(\vec{r}, t).$$

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit dans le cas général

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

En statique, cette équation devient simplement

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}.$$

Cette équation gouverne la structure du champ vectoriel et, dans le cas de la statique, le découple du champ magnétique. Compte-tenu de la propriété mentionnée précédemment,

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \exists U(\vec{r}, t) \mid \forall(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\text{grad}}U(\vec{r}, t).$$

Pour être consistant avec l'électrocinétique et l'électrostatique vu précédemment, on introduit le **potentiel électrique** $V(\vec{r}, t) = -U(\vec{r}, t)$ et l'on retrouve la relation entre champ électrique et potentiel électrostatique $V(\vec{r}, t)$. Pour tout champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ physique, on a

$$\exists V(\vec{r}, t) \mid \forall(\vec{r}, t), \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\text{grad}}V(\vec{r}, t).$$

De manière plus synthétique, on écrira $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$, ou $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, V est le potentiel électrique, d'unité SI le volt (V). Ainsi, une unité SI du champ électrique est le $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Remarque importante : le potentiel électrique V est défini à une constante, car en effet, $\forall V_0 \in \mathbb{R}$

$$\vec{\nabla}(V(\vec{r}, t) + V_0) = \vec{\nabla}V(\vec{r}, t).$$

Par conséquent, on ne peut accéder à une valeur de potentiel de manière absolue : on mesure des différences de potentiel, par exemple le 220 V du secteur électrique. Pour des raisons pratiques, on prend souvent une

I. Les équations de Maxwell

convention d'origine des potentiels, par exemple le potentiel de la Terre, comme référence des potentiels : $V_{\text{Terre}} = 0$. Considérons deux points A et B de l'espace dont on mesure la différence de potentiel $V_B - V_A$; comment cette dernière est-elle reliée au champ électrique ? À partir de la relation entre champ électrique et potentiel, on a

$$V_B - V_A = \int_A^B \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

3.2. Surface équipotentielle



Définition

Une surface équipotentielle Σ est une surface de l'espace dont tous les points sont au même potentiel électrique

$$\Sigma \text{ surface équipotentielle à } V_0 \Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in \Sigma, V(x, y, z) = V_0.$$

Considérons une surface Σ , et un déplacement $d\vec{l}$ dans l'espace, d'un point M sur cette surface. Si $d\vec{l}$ est contenu dans Σ , alors on a

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = -dV.$$

Or, $dV = 0$ car $d\vec{l}$ est contenu dans Σ (on se déplace sur la surface Σ), donc si $d\vec{l} \in \Sigma$, alors $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Le champ électrique \vec{E} est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

Dans un conducteur, les charges sont libres de se déplacer pour équilibrer le potentiel. Ainsi, $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur d'un métal². On peut considérer un métal comme un volume équipotentiel.

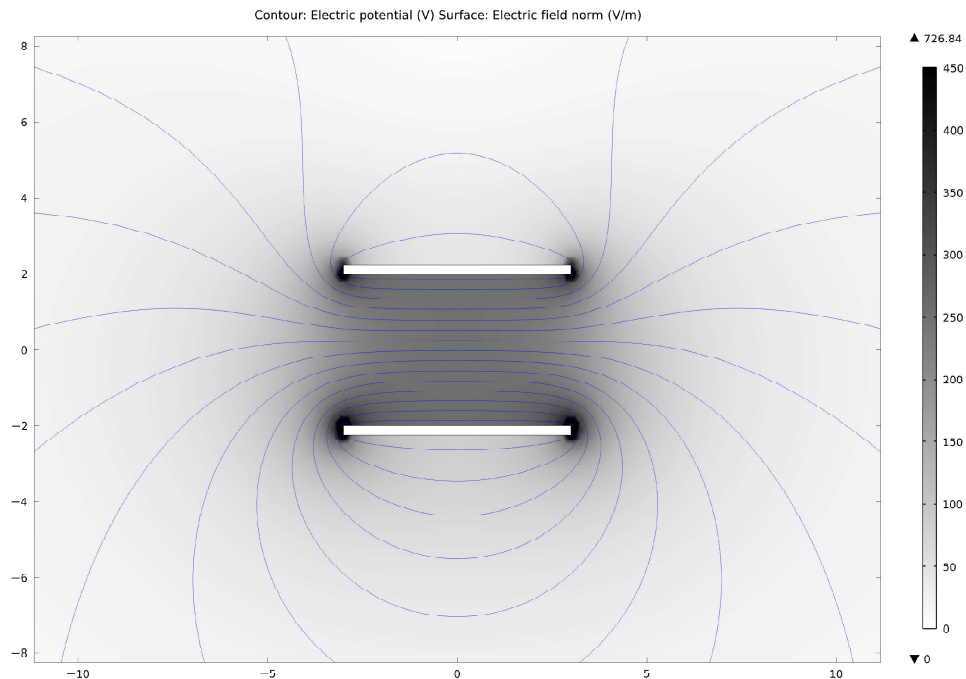


FIG. I.1. Calcul numérique des lignes équipotentielles et de la norme du champ électrique (échelle de gris) d'un condensateur plan. Les plaques métalliques (en blanc) font 6 mm de large et sont distantes de 4 mm.

Application au condensateur : un condensateur est constitué de deux plaques conductrices de section S , en regard d'une distance e , accumulant des charges et entre lesquelles il existe un champ électrique \vec{E} . Si les

2. En réalité, \vec{E} est très faible mais non nul s'il existe un courant \vec{j} dans le milieu.

plaques conductrices telles que $\sqrt{S} \gg e$, on peut négliger les effets de bords et considérer que le condensateur plan ainsi constitué est infini. Dans ce cas, le champ électrique \vec{E} entre les plaques est uniforme, et il est possible de montrer que sa valeur ne dépend que de la charge accumulée sur les plaques. En effet, si σ est la densité surfacique de charge accumulée sur une plaque (et donc $-\sigma$ sur l'autre plaque par conservation de la charge), alors

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z,$$

où l'axe Oz est perpendiculaire aux plaques. Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, donc

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}z + V_0.$$

Considérons un condensateur plan, dont les armatures de surface S sont chargées avec une charge Q sur une plaque et $-Q$ sur l'autre plaque. On a alors $\sigma = \frac{Q}{S}$ et la différence de potentiel du condensateur est alors $U = V(z=0) - V(z=e)$. En électronique, la capacité C d'un condensateur permet de relier la charge sur les armatures Q à la tension aux bornes du condensateur U selon $Q = CU$. Cela permet de calculer la capacité C d'un condensateur plan dans la limite du modèle du condensateur infini où l'on néglige les effets de bord

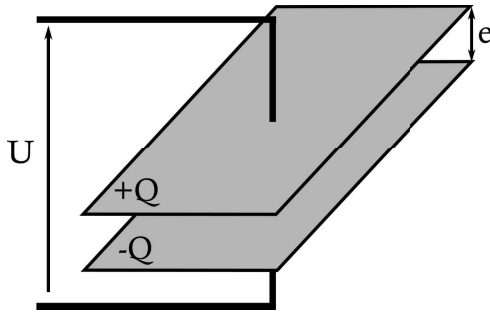


FIG. I.2. Condensateur plan formé par deux plaques de surface S , distantes de e . Soumis à une tension U , une charge Q s'accumule sur les plaques.

$$U = \frac{Qe}{S\epsilon_0} \Rightarrow Q = CU \text{ avec } \boxed{C = \frac{S\epsilon_0}{e}}.$$

3.3. Effet de pointe - pression électrostatique

La surface d'un conducteur est une équipotentielle. Cela impose donc des conditions aux limites au potentiel électrostatique, et par conséquent la géométrie d'un conducteur va impacter directement à son voisinage le potentiel électrostatique et donc également le champ électrique. Notamment, si la géométrie du conducteur varie rapidement spatialement, cela va engendrer une variation du potentiel électrostatique sur la même échelle spatiale; comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, une variation rapide spatialement du potentiel se traduit par un champ électrostatique important. C'est en particulier le cas au niveau des bords pointus d'un conducteur, on parle d'**effet de pointe**.

Ainsi, les bords pointus d'un conducteur résultent en un champ électrique intense. En effet, il est possible de montrer que pour une pointe de rayon de courbure R , le champ électrique varie comme $1/R$. Si la pointe est suffisamment pointue et/ou à un potentiel électrostatique suffisamment élevé, le champ électrostatique peut être suffisamment intense pour ioniser le gaz alentour. Ce gaz ionisé va être repoussé électrostatiquement par la pointe (même charges), ce qui va engendrer un flux de particules chargées : on parle de **pression électrostatique**. Cette pression électrostatique a un effet mécanique et il est possible par exemple d'éteindre une bougie avec une pointe et une source haute tension³. La principale application de l'effet de pointe est le paratonnerre : la pointe amorce localement la ionisation de l'air de telle sorte que l'éclair se dirigera préférentiellement vers la pointe du paratonnerre (en protégeant les alentours). Une conséquence de l'effet de pointe est l'effet "Corona" (ou effet "couronne") exposé plus en détails en compléments de ce chapitre. Dans les installations hautes tensions, les aspérités ont un effet de pointe suffisant pour provoquer la ionisation de l'air. Cela se traduit notamment par des pertes énergétiques.

3.4. Théorème de Stokes

Le théorème résulte de la simple intégration sur un contour fermé de la relation entre le rotationnel et la circulation élémentaire.

3. <https://www.youtube.com/watch?v=Z2TXK7xd5NM>

I. Les équations de Maxwell

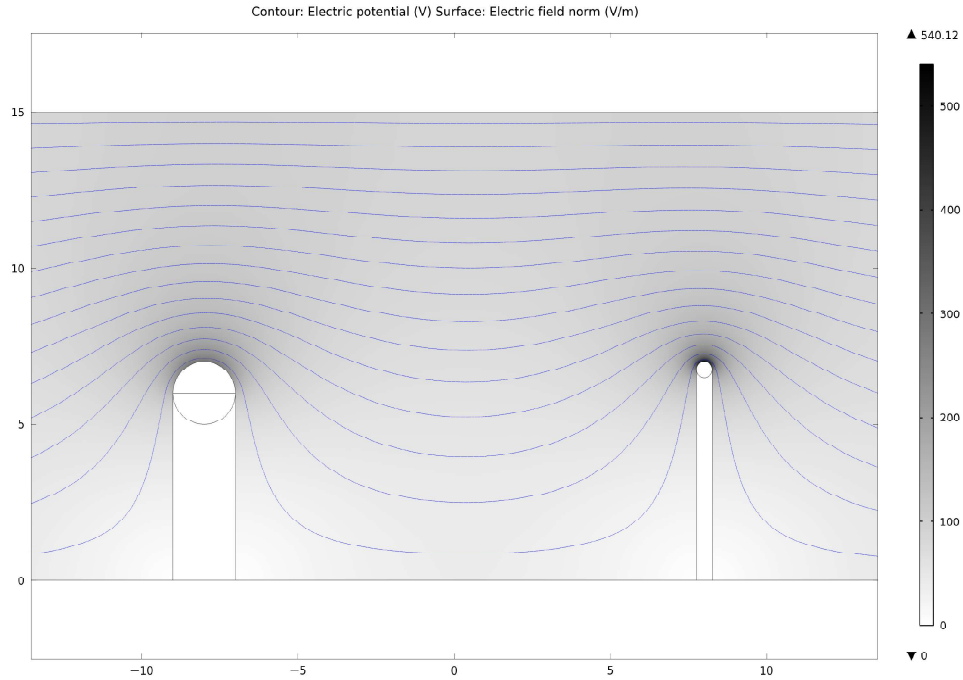


FIG. I.3. Illustration de l'effet de pointe. On considère deux tiges en métal arrondies à leurs extrémités et reliées par un plan métallique. L'ensemble est donc un volume équipotentiel. Le rayon de courbure de la sphère de gauche est de 1 mm et de 0,2 mm pour la sphère de droite. Une plaque métallique est placée au-dessous à 15 mm. Le potentiel électrostatique et le champ électrique sont calculés numériquement. La norme du champ électrique est représenté en échelle de gris, et les lignes équipotentielles sont tracés entre les deux plaques métalliques. La présence des pointes modifie les lignes d'équipotentielles (par rapport à un simple condensateur plan) ce qui engendre un resserrement des lignes équipotentielles et donc une augmentation de la norme du champ électrique. Le champ électrique autour de la pointe de plus faible rayon de courbure est plus intense.



Théorème de Stokes

La circulation le long d'un contour fermé \mathcal{C} d'un champ vectoriel est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface S s'appuyant sur ce contour, et orientée par ce contour

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

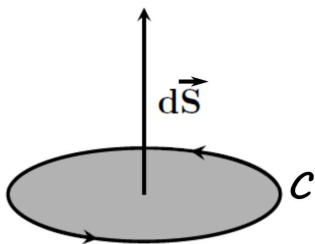


FIG. I.4. Contour fermé \mathcal{C} délimitant une surface S .

En appliquant ce théorème au champ électrique \vec{E} , pour tout chemin fermé \mathcal{C} de l'espace, on a une circulation de \vec{E} nulle

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

La circulation de \vec{E} sur une courbe fermée est nulle. C'est une formulation équivalente à $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. En effet, on a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = \int_A^A -dV = V_A - V_A = 0.$$

On retiendra donc l'équivalence des trois formulations $\text{rot} \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists V \mid \vec{E} = -\vec{\nabla}V \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Attention : toutes ces relations sont valables uniquement en STATIQUE !

4. Maxwell-Gauss et électrostatique

4.1. Équation de Poisson et loi de Coulomb

L'équation de Maxwell-Gauss est une équation aux sources

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

On a

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V,$$

donc

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = -\Delta V.$$

On obtient alors l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

La solution générale de l'équation de Poisson est

$$V(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3\vec{r}'$$

4.2. Théorème d'Ostrogradsky et théorème de Gauss

Appliquons le théorème de Green-Ostrogradsky au champ électrostatique. Soit un volume V délimité par une surface Σ , contenant une charge totale Q . Alors

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

avec

$$Q = \iiint_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$

Le vecteur surface élémentaire $d\vec{\Sigma}$ est orienté vers l'extérieur du volume V dans le calcul de l'intégrale surfacique.

Théorème de Gauss

Le flux de \vec{E} à travers une surface S fermée est égal à la somme totale (algébrique) des charges intérieures au volume V divisées par ϵ_0 .

Exemple d'application du théorème de Gauss :

On considère une boule uniformément chargée de centre O et de rayon R . La charge totale de cette sphère est Q , de telle sorte que la densité volumique de charge de la sphère est

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Soit M un point de l'espace. On cherche à calculer $\vec{E}(M)$ le champ électrique en M . On munit l'espace d'un système de coordonnées cylindriques et d'un repère centrée en O de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Tout plan passant par O et M est un plan de symétrie Π de la distribution de charge donc le vecteur $\vec{E}(M)$ est contenu dans chacun de ces plan Π . Donc nécessairement, on a

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r.$$

De plus, la distribution de charge est invariante par rotation autour du point O donc le champ électrique ne peut dépendre de θ et φ . Ainsi, le champ électrique a la forme suivante

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{u}_r.$$

I. Les équations de Maxwell

Pour calculer \vec{E} , on va appliquer le théorème de Gauss sur une surface respectant les symétries de la distribution de charge. On considère la surface Σ constituée par le sphère de rayon r et de centre O (telle que $M \in \Sigma$). Appliquons le théorème de Gauss à cette surface

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r d\Sigma \vec{u}_r = \oiint_{\Sigma} E(r) d\Sigma,$$

or sur Σ , r est constant donc

$$\oiint_{\Sigma} E(r) d\Sigma = E(r) \oiint_{\Sigma} d\Sigma = 4\pi r^2 E(r).$$

Pour appliquer le théorème de Gauss, il faut la charge contenue dans Σ . Pour cela, nous allons distinguer deux cas : $r \geq R$ et $r \leq R$.

Si $r \geq R$: alors toute la charge Q est contenue dans Σ . D'après le théorème de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

d'où le champ électrique

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

Ce champ électrique est identique à celui d'une charge ponctuelle Q située en O .

Si $r \leq R$: alors on calcule la charge intérieure à partir de ρ

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Donc, en appliquant le théorème de Gauss, on obtient

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3},$$

d'où le champ électrique à l'intérieur de la boule

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \vec{u}_r.$$

5. Structure du champ magnétique

5.1. Sources de champ magnétique

On a l'équation de structure

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}.$$

Donc pour toute surface fermée Σ , on a

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint_V \text{div } \vec{B} dV = 0.$$

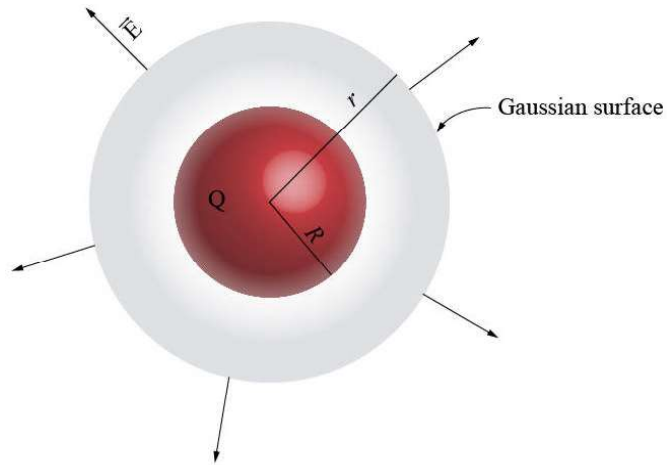


FIG. I.5. Théorème de Gauss appliqué à une boule chargée. Figure extraite de <https://makingphysicsclear.com/applications-gauss-law-electrostatic/>.

On dit alors que champ magnétique est à flux conservatif. Conséquence : il ne peut pas exister de monopôle magnétique, un champ magnétique radial issu d'un point n'existe pas, il n'existe donc pas de "charge magnétique". En effet, pour une surface Σ fermée quelconque entourant une potentielle "charge magnétique"

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0.$$

Donc le champ magnétique est forcément nul. De plus, les lignes de champ magnétique sont toujours fermées. Les sources de champs magnétiques sont les courants électriques (équation de Maxwell-Ampère), et les aimants via les moments magnétiques atomiques assimilables à de petites boucles de courants.

5.2. Conservation du flux magnétique

On considère un tube de champ délimité par une surface entrante S_1 et une surface sortante S_2 . On forme ainsi une surface fermée Σ , délimitant un volume V . Structurellement, on a

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0.$$

Donc

$$\phi_{S_1} = \phi_{S_2},$$

où ϕ_{S_i} est le flux de champ magnétique à travers la surface i orientée de gauche à droite

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Le champ magnétique est à flux conservatif. Conséquence : si $S_1 < S_2$, alors $B_1 > B_2$. Et enfin,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \exists \vec{A} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

car

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = 0.$$

On appelle \vec{A} le *potentiel vecteur*.

Si S_1 et S_2 sont deux surfaces ayant pour support le même contour fermé \mathcal{C} , alors $\phi_{S_1} = \phi_{S_2}$: le flux de champ magnétique à travers un contour fermé est indépendant de la surface choisie pourvue qu'elle soit pour support ce contour.

6. Maxwell-Ampère et magnétostatique

6.1. Loi de Biot et Savard

On a l'équation aux sources de Maxwell-Ampère

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

En statique, $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ relie le champ magnétique aux courants. On peut alors démontrer les lois de Biot et Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d^3\vec{r}',$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} d^3\vec{r}'.$$

I. Les équations de Maxwell

6.2. Théorème d'Ampère

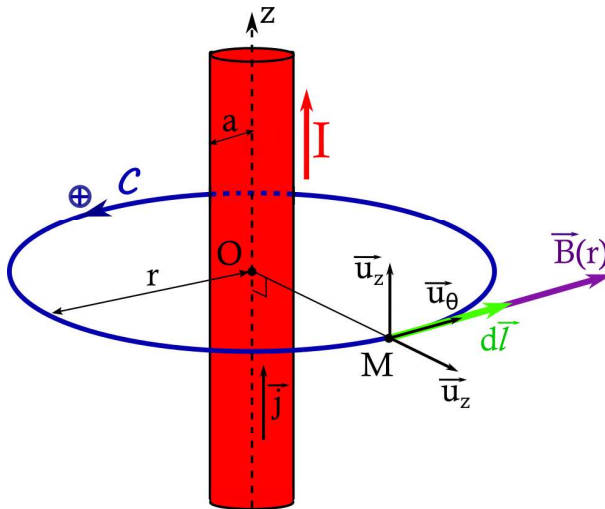
En statique, $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$: on applique le théorème de Stokes au champ magnétique, sur un contour fermé \mathcal{C} . On obtient le théorème d'Ampère en statique

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = \mu_0 I$$

avec $I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}$ le courant traversant (algébriquement) la surface Σ .

Théorème d'Ampère

La circulation de \vec{B} sur un contour Γ fermé est égal à la somme totale (algébrique) des courants traversant une surface Σ ayant pour support orienté Γ .



Exemple d'application du théorème d'Ampère :

On considère le cas d'un fil infini dans un espace muni d'un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On modélise le fil par un cylindre d'axe (Oz) , de rayon a et d'extension infinie selon (Oz) . Le fil est parcouru par un courant total I , associé à une densité de courant uniforme $\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$. Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$. Le système étant à symétrie cylindrique, on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour repérer M . Le plan Π passant par M et l'axe (Oz) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc d'antisymétrie de champ magnétique. Donc \vec{B} est perpendiculaire à Π , c'est-à-dire que \vec{B} est orthoradial

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta.$$

FIG. I.6. Fil infini de rayon a . Le contour \mathcal{C} considéré pour appliquer le théorème d'Ampère est un cercle de rayon r .

De plus, la distribution de courant est invariante par translation selon z et par rotation autour de l'axe Oz . Donc \vec{B} ne dépend ni de z , ni de θ donc

$$\vec{B}(r, \theta, z) = B(r) \vec{u}_\theta.$$

Considérons le contour Γ formé par le cercle centré sur l'axe (Oz) et de rayon r (donc passant par M). Sur ce contour, r est constant donc l'amplitude du champ magnétique également. Donc on obtient facilement la circulation du champ magnétique sur le contour Γ

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r).$$

Pour appliquer le théorème d'Ampère, il faut le courant traversant la surface Σ ayant pour support orienté Γ . Pour cela, nous allons distinguer deux cas : $r \geq a$ et $r \leq a$.

Si $r \geq a$: alors tout le courant I traverse Σ et donc d'après le théorème d'Ampère

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

d'où le champ magnétique en M

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

Ce champ magnétique est indépendant de rayon a du fil.

Si $r \leq a$: alors le courant I traversant Σ se calcule à partir de la densité de courant volumique \vec{j} selon

$$I \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\Sigma} = I\pi r^2 j = I \frac{r^2}{a^2}.$$

D'après le théorème d'Ampère, on obtient

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a a},$$

d'où le champ magnétique en M

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a a} \vec{u}_{\theta}.$$

7. Approximation des régimes quasistationnaires (ARQS)

7.1. Définition

Les équations de Maxwell permettent de décrire tous les phénomènes électromagnétiques, y compris l'électronique. Cependant, en électronique au S1, nous avons introduit la notion d'*approximation des régimes quasistationnaires* (ARQS), où les temps de propagation des champs électromagnétiques étaient considérés comme négligables. En pratique, cela revient également à considérer que la vitesse de la lumière $c \rightarrow +\infty$. En pratique, considérons un circuit d'extension spatiale caractéristique L . La durée de propagation du champ électromagnétique au sein de ce circuit est typiquement de l'ordre de

$$\Delta t \sim \frac{L}{c}.$$

L'approximation des régimes quasistationnaires (ARQS) consiste à négliger ce retard Δt à la propagation du champ électromagnétique dans le circuit. En électronique, en régime sinusoïdal, c'est l'ARQS qui permet de définir un courant $I(t)$ dans un fil dont la valeur est identique en tout point de ce dernier par exemple.

L'ARQS permet donc une simplification des problèmes pourvu que ce retard Δt soit négligeable. En régime sinusoïdale, il faut comparer ce retard à la période des signaux considérés $T = 1/f$, où f est la fréquence du signal. Ainsi, l'ARQS correspond aux régimes sinusoïdaux tels que $T \gg \delta T$ soit $1/f \gg L/c$. En introduisant la longueur d'onde dans le vide $\lambda = c/f$, on obtient la condition suivante

$$\lambda \gg L.$$

Un circuit électronique d'extension L en régime variable de longueur d'onde λ vérifiera l'approximation des régimes quasistationnaires (ARQS) si et seulement si $\lambda \gg L$, où L est la taille caractéristique du dispositif.

L'ARQS néglige les phénomènes ondulatoires et la propagation des ondes. En effet, nous verrons dans le chapitre 3 qu'une onde électromagnétique peut s'écrire de la forme suivante

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

avec $\vec{k} \cdot \vec{r} \sim 2\pi \frac{r}{\lambda}$. Donc si $r \ll \lambda$, *i.e.* dans l'ARQS, ce terme est négligeable dans la fonction cosinus et

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t),$$

et on retrouve le formalisme utilisé en électrocinétique. A contrario, tous les phénomènes ondulatoires ne pourront pas être décrit dans l'ARQS, en particulier les problèmes de rayonnement électromagnétique (antennes émettrices d'ondes électromagnétiques : WiFi, 5G, etc...).

En pratique, l'ARQS correspond aux régimes de longueurs d'ondes grandes, *i.e.* de fréquences basses (car $f = c/\lambda$). Pour l'étude d'un circuit d'extension spatiale donnée L , ce dernier pour être décrit dans le cadre

I. Les équations de Maxwell

de l'ARQS tant que les fréquences d'étude seront suffisamment faibles. Pour un circuit électronique typique en application courante, nous avons typiquement L 10 à 30 cm. Ainsi, pour des fréquences $f \ll 1$ GHz, il est possible de décrire leur comportement dans le cadre de l'ARQS. Le domaine des hyperfréquences ($f > 1$ GHz) devient alors plus délicat à traiter, incluant les fréquences WiFi (2.56 GHz) et 5G (3,5 GHz et 26 GHz). Cependant, les composants utilisés sont plus petits, inférieurs au centimètre, permettant toujours d'appliquer ces résultats. En revanche, tout problème ondulatoire ou nécessitant la description d'un phénomène de propagation sur des distances supérieures à la longueur d'onde ne peuvent être décrits dans le cadre de l'ARQS.

7.2. Equations de Maxwell dans l'ARQS

L'ARQS revient à considérer⁴ que la vitesse de la lumière "tend vers l'infini". Or l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

or $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ donc cette équation peut s'écrire comme suit

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Le terme $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, appelé *courant de déplacement*, peut être négligé dans la limite où $c \rightarrow +\infty$. Ainsi, dans l'ARQS, on néglige ce courant de déplacement et les équations de Maxwell deviennent

$$\text{div} \vec{B} = 0, \tag{I.5}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{I.6}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{I.7}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \tag{I.8}$$

Conséquence importante : l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS est équivalente à une description magnétostatique du champ magnétique. Ainsi, **le théorème d'Ampère est aussi applicable dans l'ARQS et non pas seulement dans le cas de la magnétostatique.**

4. dans une vision simple. Ce résultat peut cependant se démontrer de manière plus rigoureuse.

Compléments au chapitre *Les équations de Maxwell*

1. Energie électrostatique

On considère un point M de l'espace, de potentiel électrostatique $V(M)$. On amène une charge q depuis l'infini (avec pour convention $V(r \rightarrow +\infty) = 0$) jusqu'au point M . On considère que cette transformation est effectuée par un opérateur extérieur, qui à tout instant applique une force \vec{f}_{op} à la charge. Cette transformation est supposée quasistatique, donc $\vec{f}_{op} = -\vec{f}_l$.

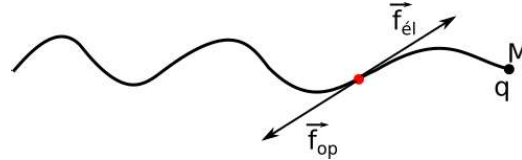


FIG. I.7. Calcul du travail d'un opérateur pour amener une charge q depuis l'infini en M au potentiel électrique $V(M)$.

Soit $E_p(N)$ l'énergie potentielle d'interaction entre le champ électrique $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ et la charge q , on a

$$E_p(M) - E_p(\infty) = W_{op}(\vec{f}_{op}) = \int_{+\infty}^M -q\vec{E} \cdot d\vec{l} = + \int_{+\infty}^M q\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l},$$

où W_{op} est le travail de l'opérateur effectuant la transformation. On en déduit alors, après intégration, $E_p(M) - E_p(\infty) = q[V(M) - V(\infty)] = qV(M)$. On choisit arbitrairement $E_p(\infty) = 0$ dans le potentiel $V(\infty) = 0$. On obtient ainsi l'énergie potentielle d'une charge q dans un potentiel électrique V selon $E_p(M) = qV(M)$.

2. Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)

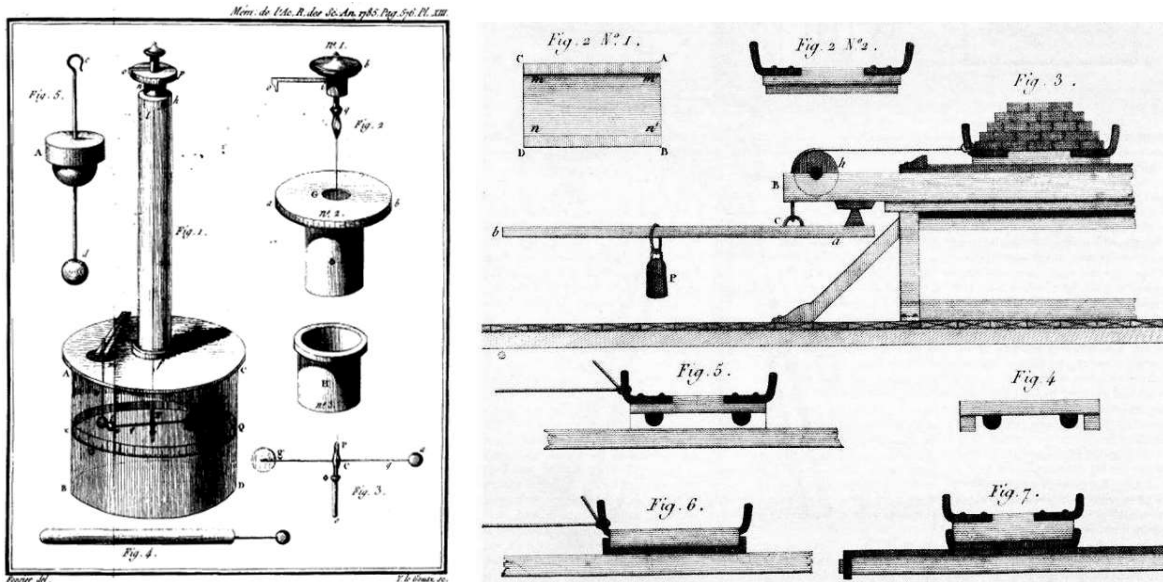


FIG. I.8. La balance de torsion de Coulomb (gravure des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784) et le chariot utilisé par Coulomb pour la mesure des forces de frottement (illustration issue de *Théorie des machines simples*, 1821). Sources : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bcoulomb.png>
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Appareil_de_Coulomb.jpg

I. Les équations de Maxwell



FIG. I.9. Charles-Augustin Coulomb, lieutenant général du Génie, physicien membre de l'Académie des sciences en 1785, de l'Institut en 1795, en uniforme d'officier du Génie, portant la croix de Saint-Louis, tenant son invention, la balance électrique de torsion, et un manuscrit portant la formule mathématique de la "force de torsion". Huile sur toile de Louis Hierle, 1894 (Versailles, châteaux de Versailles et de Trianon).

Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Charles_de_Coulomb.png

Il est envoyé en mission à la Martinique pendant huit ans, pour participer à la construction du fort Bourbon, durant lesquels il réalise plusieurs expériences sur la résistance des maçonneries et la tenue des murs d'escarpe (soutènement). Il est rapatrié en 1772 avec le grade de capitaine et renoue avec une carrière de scientifique. En 1773, il adresse un mémoire intitulé *Essai sur une application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture* à l'Académie des sciences. Dans ce mémoire, il étudie la flexion des poutres, la poussée des remblais sur les murs de soutènement et l'équilibre des voûtes en maçonnerie. Lors de ses affectations militaires, il effectue également des expériences sur les cordages. En 1781, il obtient le prix de l'Académie des sciences pour la détermination des lois du frottement et de la raideur des cordes. Il est ensuite élu à l'Académie des sciences. Après une mission d'expertise pour l'extension du port de Saint-Malo, il est nommé intendant des eaux et fontaines de France, puis promu lieutenant-colonel en 1786. La Révolution ne l'impacte qu'à partir de 1791 ; durant la Terreur, il se réfugie dans la région de Blois, abandonnant ses biens à Paris. Il ne revient à Paris que sous le Directoire. Napoléon lui offre le poste d'inspecteur général de l'instruction publique, sous le ministère Fourcroy, de 1802 à sa mort en 1806.

S'il a contribué de manière significative à la mécanique avec l'étude des forces de frottements⁵, des phénomènes de torsion et leurs applications en génie civil, Charles Coulomb a également publié sept traités sur l'électricité et le magnétisme. Il a notamment exploité sa connaissance des phénomènes de torsion pour la construction de sa balance de torsion en 1784 (ou balance de Coulomb⁶, Fig. I.13) ayant permis de déterminer la force d'interaction électrostatique entre deux sphères chargées, résultant en la loi de Coulomb de l'électrostatique énoncée en 1785. Plus tard, en 1798, le physicien britannique Henry Cavendish réalisa une expérience similaire (dite *expérience de Cavendish*) pour mesurer la force d'attraction gravitationnelle, également à l'aide d'un pendule de torsion. Charles Coulomb était un scientifique très rigoureux, avec une approche expérimentale des phénomènes physiques. Les résultats de ses recherches n'ont quasiment pas été modifiés avant leur intégration à la physique classique et à l'ingénierie mécanique. Ses travaux dans le domaine militaire ont également eu un impact : son ouvrage *Mémoire sur le service des officiers du corps du génie* (1776) a inspiré la réforme du ministre de la guerre, le comte de Saint-Germain, qui a réformé cette arme à la fin des années 1780.

5. donnant lieu aux lois du frottement solide de Coulomb.

6. https://fr.wikipedia.org/wiki/Balance_de_Coulomb

Sa contribution scientifique importante lui a valu d'entrer dans la postérité. L'unité de la charge électrique porte son nom (le coulomb (C)), son nom est inscrit sur la tour Eiffel à Paris et en 1970, l'Union astronomique internationale a donné le nom de Coulomb à un cratère lunaire. Enfin, un laboratoire de Physique porte son nom à l'Université de Montpellier (laboratoire Charles Coulomb⁷, UMR 5221 CNRS-Université de Montpellier).

Sources :

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_Coulomb
- <https://francearchives.fr/commemo/recueil-2006/39265>

3. Jean-Baptiste Biot (1774-1862) et Félix Savart (1791-1841)

Jean-Baptiste Biot est un physicien, astronome et mathématicien français, né le 21 avril 1774 à Paris, mort le 3 février 1862 à Paris. Il est le pionnier de l'utilisation de la lumière polarisée pour l'étude des solutions. Après des études secondaires au collège Louis-le-Grand jusqu'en 1791, il s'engage comme canonier volontaire au neuvième bataillon de la Seine-inférieure. En 1794, il commence des études d'ingénieur à l'École des ponts et chaussées, puis à l'École centrale des travaux publics (qui deviendra ensuite l'École Polytechnique) à son ouverture en décembre 1794 au Palais Bourbon. En 1795, il retourne à l'École des ponts et chaussées pour terminer sa formation d'ingénieur. Après ses études d'ingénieur, Biot commence sa carrière comme professeur de mathématiques à l'École Centrale du département de l'Oise (1797) durant quatre ans. Il a publié le contenu de ses cours destinées aux candidats à l'École Polytechnique en 1802⁸. Il reçoit le soutien de Pierre-Simon de Laplace pour être nommé en 1800, à l'âge de 26 ans, professeur de physique mathématique au Collège de France.

Il devient docteur ès sciences et est nommé premier titulaire de la chaire d'astronomie de la faculté des sciences de Paris en 1809. Entre 1816 et 1826, il est chargé des enseignements de physique en acoustique, magnétisme et optique, avec Joseph-Louis Gay-Lussac qui est en charge de l'enseignement de la chaleur, des gaz, de l'hygrométrie, de l'électricité et du galvanisme. En 1840, il est nommé doyen de la faculté des sciences de Paris.

Biot est notamment connu pour avoir établi les lois de rotation du plan de polarisation de la lumière traversant une substance liquide (loi de Biot) et la loi de Biot-Savart permettant de calculer le champ magnétique généré par une distribution de courant.

Félix Savart est né à Mézières (Ardennes) en 1791 et mort à Paris en 1841. Il possède une double formation de médecin chirurgien et de physicien. Il est essentiellement connu pour l'établissement de la loi de Biot-Savart. Il a également étudié les propriétés des cordes vibrantes et a construit un violon trapézoïdale qui est toujours conservé en France, dans la



FIG. I.10. Jean-Baptiste Biot (1774-1862).

Source : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jbiot.jpg>



FIG. I.11. Félix Savart (1791-1841). Source : <https://alchetron.com/Félix-Savart>

7. <https://coulomb.umontpellier.fr/>

8. *Essai de géométrie analytique : appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre.*

I. Les équations de Maxwell

collection de l'École Polytechnique. Son nom a été donné à une unité de mesure des intervalles musicaux (le savart). Il est également connu pour être l'inventeur du sonomètre. En 1827, il a été élu à l'Académie des sciences. En 1836, il est nommé à la chaire de physique générale et expérimentale du Collège de France, succédant à André-Marie Ampère. En 1839, il est élu membre étranger de la Royal Society.

Sources :

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Biot
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Félix_Savart
- <https://www.universalis.fr/encyclopedie/felix-savart/>

4. James Clerk Maxwell (1831-1879)

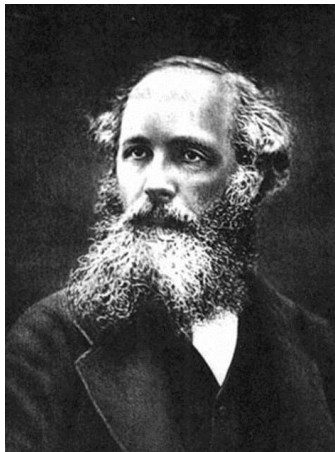


FIG. I.12. James Clerk Maxwell (1831-1879).

Source : https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fichier:James_clerk_maxwell.jpg

James Clerk Maxwell est né en 1831 à Édimbourg (Écosse) et mort en 1879 à Cambridge (Angleterre). Il a effectué ses études à l'Université d'Édimbourg puis à l'Université de Cambridge. Il devient professeur à Aberdeen de 1856 à 1860 puis au King's College de 1860 à 1865. C'est lorsqu'il est au King's College qu'il effectue l'essentiel des ses travaux en électromagnétisme. En 1861, il étudie la nature des champs électromagnétiques dans un article en deux parties dans *On Physical Lines of Force*. Il introduit dans la notion d'induction électromagnétique, puis il discute plus tard, en 1862, la nature de l'électrostatique et les courants de déplacements. Une dernière contribution consiste en l'étude de la polarisation de la lumière et la rotation des plans de polarisation induite par un champ magnétique⁹. En 1865, Maxwell démissionne de la chaire du King's College de Londres. En 1868, il publie son article *On Governors* (Proceedings of the Royal Society, vol. 16 (1867-1868)), décrivant le comportement des régulateurs, les dispositifs contrôlant la vitesse des moteurs à vapeur.

Ce travail constitue les bases théoriques de l'ingénierie de contrôle. En 1870, il rédige un article intitulé *Sur les figures, cadres et diagrammes de forces réciproques*, discutant la rigidité de diverses conceptions de réseaux. En 1871, Maxwell est le premier à utiliser explicitement l'analyse dimensionnelle en physique. Cette année là, il devient également à nouveau professeur de physique (chaire Cavendish) à Cambridge. En 1876, il rédige l'ouvrage *Theory of Heat* et le traité *Matter and Motion*. En fin de carrière, Maxwell a également travaillé sur la densité de la Terre et la composition de l'eau. Il meurt le 5 novembre 1879 à Cambridge d'un cancer de l'abdomen, à l'âge de 48 ans.

De 1855 à 1872, Maxwell a publié une série de recherches sur la perception des couleurs. Il a également travaillé en théorie cinétique des gaz et en thermodynamique. Indépendamment de Ludwig Boltzmann, il formule en 1866 la théorie cinétique des gaz dite de Maxwell-Boltzmann. En 1871, il établit les relations de la thermodynamique dites de Maxwell, reliant les dérivées secondes de certains potentiels thermodynamiques. Mais la plus grande partie de la vie scientifique de Maxwell a été consacrée à l'électricité et l'électromagnétisme, et l'établissement des équations de Maxwell, qui sont présentées la première fois à la Royal Society en 1864. Ces équations permettent de prédire l'existence d'ondes se déplaçant dans le vide à une vitesse mesurable expérimentalement. Avec les moyens de l'époque, Maxwell obtient une célérité de 310 740 000 m/s. Dans son article de 1864, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Maxwell écrit :

L'accord des résultats semble montrer que la lumière et le magnétisme sont deux phénomènes de même nature et que la lumière est une perturbation électromagnétique se propageant dans l'espace suivant les lois de l'électromagnétisme.

9. Phénomène découvert par Michael Faraday, nommé *effet Faraday*.

Cette prévision s'est révélée correcte et la relation entre lumière et électromagnétisme est considérée comme une des plus grandes découvertes du XIX^e siècle dans le domaine de la physique. À ce moment Maxwell pense que la propagation de la lumière nécessite un milieu pour support des ondes : l'éther. Avec le temps l'existence d'un tel milieu, remplissant tout l'espace et apparemment indétectable par des moyens mécaniques, posera de plus en plus de problèmes pour être mise en accord avec les expériences telles que celle de Michelson et Morley. C'est cette dernière difficulté qui amènera Albert Einstein à formuler sa théorie de la relativité restreinte pour laquelle l'existence de l'éther n'est plus nécessaire.

Sources :

— https://fr.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell

5. Effet corona

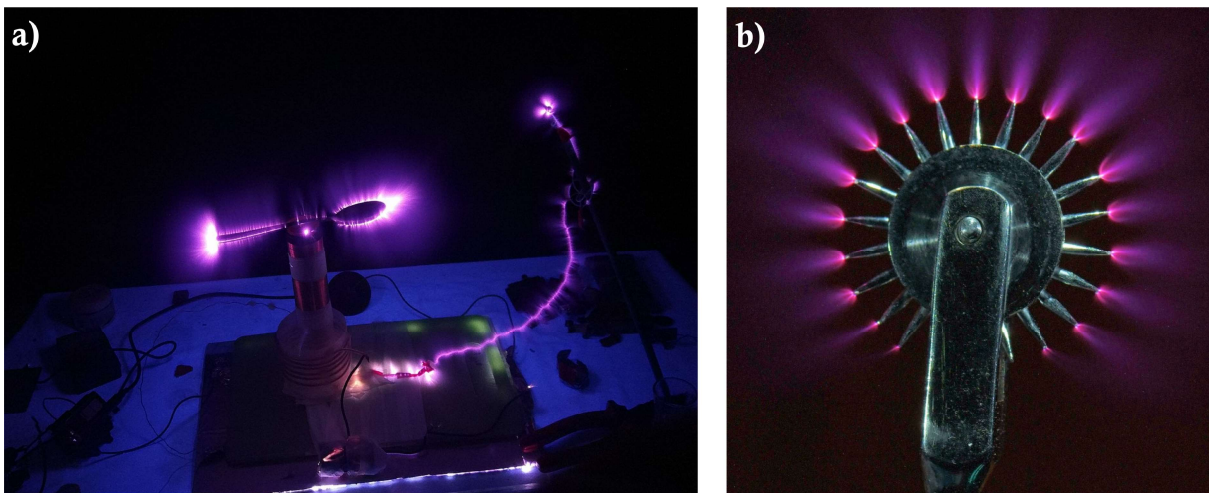


FIG. I.13. a) Décharge Corona d'une cuillère soumise à une haute tension. b) Décharge corona ici provoquée sur une roulette de Wartenberg. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_corona.

L'effet corona, aussi appelé "effet couronne" ou "effet de couronne", est un phénomène de décharge électrique partielle entraînée par l'ionisation du milieu entourant un conducteur. Cet effet apparaît quand le champ électrique dans l'atmosphère dépasse une valeur critique mais inférieure au champ de claquage, ne permettant pas la formation d'arcs électriques. Il se manifeste par l'apparition de lignes lumineuses et des points lumineux diffus de couleur bleu-violet caractéristique, essentiellement autour des aspérités métalliques des objets. Parfois, l'effet Corona prend la forme de "gainés lumineuses" autour des câbles sous haute tension. Ce phénomène est rare (nécessitant des tensions élevées), et doit être évité sur les lignes électriques haute tension, car responsable de pertes énergétiques. L'effet Corona a été étudié pour la première fois par F.W. Peek en 1929, par une approche empirique¹⁰ établissant le champ seuil d'apparition du phénomène (loi de Peek). Ce phénomène a été observé sur les premières lignes haute-tension, ayant pour conséquence la génération de vibrations des câbles conducteurs. Ces vibrations ont été étudiées dans les années trente, à la fois en laboratoires haute-tension mais également sur le réseau électrique. Ces recherches se sont poursuivies dans les années 1970, notamment en cherchant à expliquer l'amplitude de ces vibrations, avant de chercher à mieux les expliquer dans les années 1980. EDF a alors produit un code¹¹ permettant de calculer et analyser la formation des pertes sur les lignes haute tension et de suivre physiquement le mécanisme de pertes, notamment le mouvement des charges¹². Une décharge Corona se produit lorsque le champ électrique est suffisamment important pour ioniser le fluide environnant. Un plasma est alors créé et les charges électriques se propagent. Le champ électrique

10. F.W. Peek, *Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering*, McGraw-Hill, 1929

11. code EFCOR (EFFet CORona)

12. Gary Claude, *Effet couronne sur les réseaux électriques aériens*, Techniques de l'ingénieur, 10 février 1998

I. Les équations de Maxwell

étant plus important au niveau des pointes, l'effet Corona se produit essentiellement sur les aspérités métalliques des objets correspondants (par effet de pointe). Une fois le plasma généré, le plasma conducteur va avoir tendance à modifier la géométrie de pointe et donc induit une chute du champ électrique local. Le champ électrique est alors trop faible pour entretenir la ionisation locale et les particules chargées du plasma se dissipent sous l'effet de la force électrostatique, pour se neutraliser ensuite par contact avec l'objet de charge opposée.



FIG. I.14. Effet de couronne sur un éclateur (ligne de 500 kV); il correspond à une perte en ligne et à une production d'ozone troposphérique polluant. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_corona

En revanche, l'effet Corona est accompagné de bruits acoustiques dans le domaine audible par l'oreille humaine, et donc des nuisances sonores. Il peut également être source de rayonnements électromagnétiques perturbant les fréquences radio et télévisuelles. Les vibrations mécaniques induites par l'effet Corona sur les câbles de transport électrique induisent des contraintes mécaniques accélérant le vieillissement et donc l'usure des conducteurs. Les installations électriques haute tension sont conçues pour minimiser la formation des décharges Corona, et ainsi limiter les pertes énergétiques et le bruit engendré sur les lignes de transport, limiter l'usure des équipements (transformateurs, machines électriques) et limiter l'impact environnemental associé à la production d'ozone.

Sources :

— https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_corona

6. Feu de Saint-Elme

Le feu de Saint-Elme est un phénomène physique, ne se produisant que dans certaines conditions météorologiques, qui se manifeste par des lueurs apparaissant surtout aux extrémités des mâts des navires et sur les ailes des avions certains soirs. Il s'agit d'un phénomène similaire à l'effet Corona. Lorsque le temps est orageux, le champ électrique dans l'atmosphère est intense, et est exalté par effet de pointe aux extrémités comme les mâts d'un bateau ou les ailes d'un avion. La ionisation locale de l'air au niveau des pointes engendre une accélération des particules ionisées et un rayonnement bleu violacé caractéristique (similaire aux couleurs des boules à plasma). Il s'agit d'un signe avant-coureur d'un risque de foudre imminent (car le champ électrique atmosphérique est intense). Le nom de *feu de Saint-Elme* provient de Érasme de Formia, devenu saint Elme, patron des marins, qui aurait continué à prêcher après que la foudre l'ait frappé à ses pieds. Il était prié par les marins, qui craignent les orages en mer. Ainsi, un feu de saint Elme sur les mâts d'un bateau est un signe de protection du saint, annonciateur d'un orage.

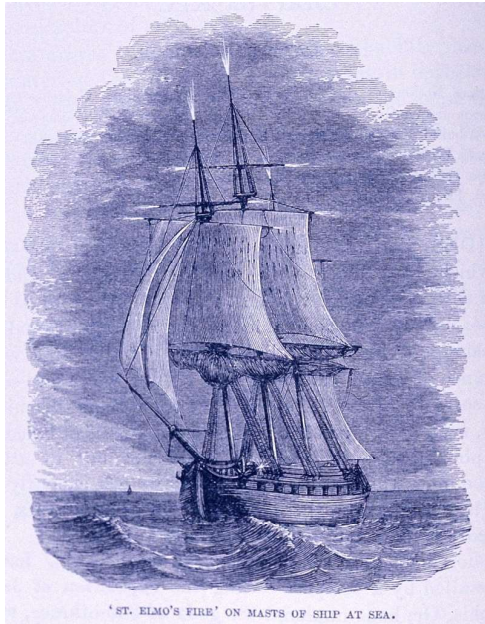


FIG. I.15. Feu de Saint-Elme sur un bateau (G. Hartwig) dans *The Aerial World*, 1886. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Feu_de_Saint-Elme

Ce phénomène est également observable en aéronautique, sur les extrémités d'un avion. Un feu de saint Elme sur un aéronef est un signe que l'appareil risque d'être frappé par la foudre. Si les accidents dus à la foudre sont rares, ils peuvent avoir de sérieuses conséquences, notamment sur les instruments de vol. Ils se produisent à proximité ou à l'intérieur de cumulonimbus. Un phénomène similaire a été observé lorsqu'un avion traverse un nuage de cendres volcaniques lors d'une éruption, la friction provoquant une ionisation¹³. Un champ électrique d'au moins 100 kV/m est nécessaire pour produire cet effet de décharge et de plasma. Un feu de Saint-Elme est accompagné d'un bruit de vrombissement électrique similaire à ce que l'on peut entendre sous les lignes de transmission très haute tension. Le feu de saint-Elme est mentionné par Hergé en 1960 dans *Tintin au Tibet*. Lors de l'ascension d'un flanc de montagne, le piolet du capitaine Haddock est soudainement enveloppé d'un champ électrique. Tintin lui explique alors l'origine de ce phénomène et mentionne correctement le feu de saint-Elme lié aux conditions météorologiques. Ce phénomène est également mentionné dans le film *Moby Dick* (1956) de John Huston, dans le roman *Voyage au centre de la Terre* de Jules Verne et dans le roman *Vendredi ou la vie sauvage* de Michel Tournier.

Un feu de saint-Elme a été filmé à bord d'un Airbus A320 :

<https://rumble.com/v4dszv-st.-elmos-fire-over-argentina.html>



FIG. I.16. Feu de saint-Elme sur le piolet du capitaine Haddock. Extrait de *Tintin au Tibet* (1960).

13. Incident de Jakarta, Boeing 747-236B, vol British Airways BA009 London-Auckland, 24 juin 1982. Les cendres volcaniques issues de l'éruption du Galunggung en Indonésie ont provoqué l'arrêt des quatre moteurs de l'avion.

7. Propulsion électrostatique (SEP)

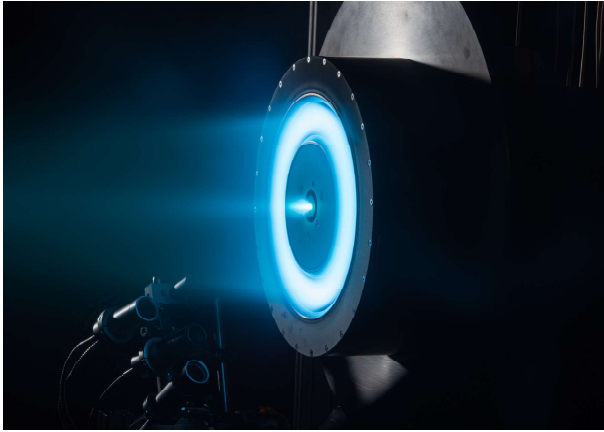


FIG. I.17. https://www.nasa.gov/mission_pages/tdm/sep/index.html

La propulsion électrostatique dans le domaine spatial est une technologie de propulsion à réaction basée sur l'éjection de particules chargées à l'aide d'un champ électrostatique. Contrairement à la propulsion chimique (à poudre ou à oxygène et hydrogène liquide) des fusées pour le décollage, la propulsion électrostatique ne permet pas de fournir des poussées suffisantes pour placer en orbite des objets comme des satellites. Cependant, avec des poussées typiques inférieures à 1 N, elle permet de communiquer des impulsions précises de manière très contrôlée et ainsi de réduire de manière très importante la masse de carburant (*ergol*) nécessaire pour manoeuvrer un engin dans l'espace. La propulsion électrostatique est basée sur l'énergie électrique, obtenue à l'aide de panneaux solaires. Les premiers prototypes

ont été développés dans les années 1960, mais ce n'est que depuis les années 2000 que son emploi s'est généralisé pour les corrections des orbites des satellites géostationnaires. Deux types de technologies sont utilisées : les moteurs à effet Hall et les moteurs ioniques à grilles. La NASA propose une vidéo en ligne d'explication du principe de fonctionnement : <https://www.youtube.com/watch?v=0K1-vromzaQ>. Une conférence de Stéphane Holé (chercheur au LPEM de l'ESPCI) présente différents phénomènes électrostatiques dont la propulsion électrostatique (à partir de 43min30s de la vidéo) : www.canal-u.tv/video/espci_paristech/de_la_foudre_de_zeus_aux_propulseurs_electrostatiques.21260

Sources :

— [https://fr.wikipedia.org/wiki/Propulsion_électrique_\(spatial\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Propulsion_électrique_(spatial))

8. Champ magnétique terrestre

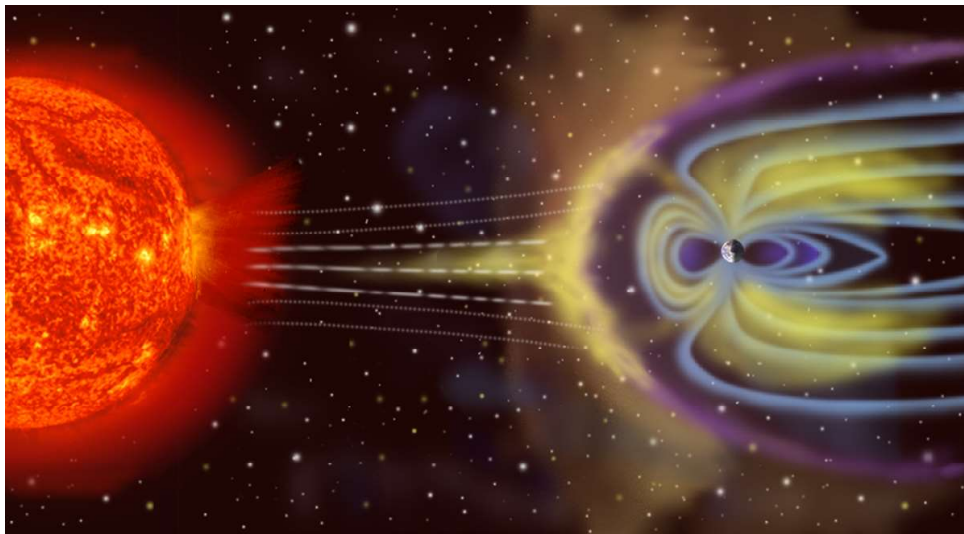


FIG. I.18. Champ magnétique terrestre et son rôle de protection face aux vents solaires.

La Terre présente naturellement un champ magnétique qui a une structure de dipôle magnétique. Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de $47 \mu\text{T}$ à la surface terrestre. Les lignes de courant magnétiques sont dirigées vers le nord magnétique terrestre (point où les lignes de champ sont localement verticales). Ce dernier ne correspond pas exactement au pôle nord géographique, associé à l'axe de rotation propre de la Terre. La distance entre le pôle nord géographique et magnétique a été mesurée en avril 2007 (projet Poly-Arctique); ils sont distants de 673km lors de la mesure. La position du nord magnétique varie au court du temps, notamment au cours d'une journée. Le champ magnétique joue un rôle essentiel dans la protection de flux de particules ionisées vers la Terre. En particulier, des ions et des électrons sont éjectés sous forme d'un plasma de la haute atmosphère du Soleil : ce sont les vents solaires. Le champ magnétique terrestre (ou magnétosphère) permet de dévier ces flux de particules chargées, potentiellement nocives pour les êtres vivants et les installations électroniques, qui ainsi n'atteignent pas la surface terrestre. Une partie de ces particules est déviée aux pôles, résultant en l'apparition du phénomène d'aurores boréales. Les vents solaires déforment également la magnétosphère et la structure du champ magnétique terrestre. Ce dernier est également affecté par les orages magnétiques solaires.

Ces fluctuations du champ magnétique terrestre peuvent être observées dans les roches lors de leur formation, permettant d'obtenir des informations sur le champ terrestre au cours du temps : c'est le paléomagnétisme. Il existe également l'archéomagnétisme basé sur les propriétés des objets archéologiques (briques, céramiques,...).

Sources :

— https://fr.wikipedia.org/wiki/Champ_magnétique_terrestre

I. Les équations de Maxwell

Chapitre II

L'induction et l'énergie magnétique

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les équations de Maxwell et montré qu'il était possible de retrouver les résultats de l'électrostatique et la magnétostatique à partir de ces dernières. Mais les équations de Maxwell contiennent également le couplage dynamique entre champ électrique et champ magnétique. Dans ce chapitre, nous allons étudier une première situation de champ variable dans le temps, celui du champ magnétique. En présence d'un champ magnétique variable, le couplage dynamique entre champs électrique et magnétique se traduit par l'apparition d'une force électromotrice dans un circuit électrique : il s'agit du phénomène d'induction, aux nombreuses applications pratiques.

1. Introduction

1.1. Force de Laplace

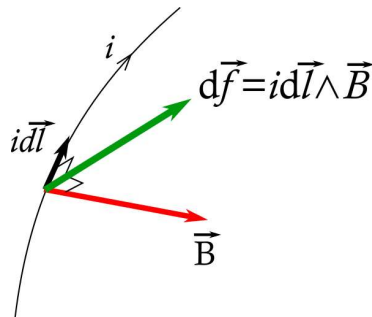


FIG. II.1. Force de Laplace dans le cas d'un circuit filiforme.

Soit un circuit filiforme plongé dans un champ magnétique \vec{B} , parcouru par un courant I . Le champ magnétique exerce sur le fil une *force de Laplace* $d\vec{f}$ sur tout élément $d\vec{l}$ du circuit selon

$$d\vec{f} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

1.2. Constatations expérimentales

Circuit mobile

Un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent se comporte comme un générateur de tension : *il est le siège d'un phénomène d'induction*. On parle dans ce cas d'induction de Lorentz.

Champ magnétique variable : l'alternateur

Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable, il est encore le siège d'un phénomène d'induction. On parle alors de phénomène d'induction de Neumann.

II. L'induction et l'énergie magnétique

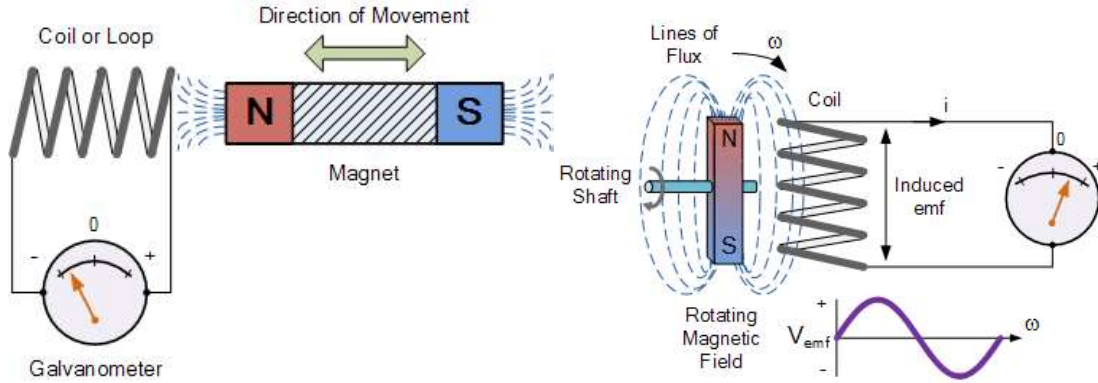


FIG. II.2. Démonstration expérimentale du phénomène d'induction (extrait de <https://www.electronics-tutorials.ws/electromagnetism/electromagnetic-induction.html>). Cas de circuits mobiles dans un champ magnétique statique.

2. Maxwell-Faraday en dynamique

2.1. Loi de Faraday

Équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On a $\text{div} \vec{B} = 0$ donc $\exists \vec{A} \mid \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ où \vec{A} est le potentiel vecteur. Donc l'équation de Maxwell-Faraday devient

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}.$$

Donc il existe un potentiel scalaire V tel que

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Calculons la circulation sur un contour \mathcal{C} fermé

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \text{grad} V \cdot d\vec{l}}_{=0} - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = -\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l},$$

Appliquons le théorème de Stokes à l'intégrale du membre de droite

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{\Sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} \right).$$

En notant ϕ le flux de champ magnétique à travers la surface Σ délimitée par le contour \mathcal{C} , on obtient

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Loi de Faraday

Pour un circuit filiforme, de contour orienté \mathcal{C} , plongé dans un champ magnétique \vec{B} , on note ϕ le flux de champ magnétique à travers une surface Σ prenant pour support le contour \mathcal{C} . Alors, si I est le courant du circuit suivant le sens d'orientation de \mathcal{C} , une f.e.m. induite e , orientée dans le sens de \mathcal{C} (convention générateur), apparaît suite à une variation de flux ϕ . On parle de f.e.m. induite, avec

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

2.2. Principe de l'alternateur

On considère un aimant mis en mouvement de rotation devant une bobine : on a un flux magnétique oscillant. Soit B_{\perp} la composante du champ normale à la surface de la bobine. On a alors

$$B_{\perp} = B_0 \cos \omega t.$$

La spire est un bobinage de résistance équivalente R . On a alors un courant circulant dans la bobine I selon la loi d'Ohm

$$I = \frac{e}{R} = \frac{B_0 S \omega}{R} \sin \omega t.$$

On obtient ainsi un courant alternatif à la fréquence de rotation ω . C'est le principe de base qui est à l'origine toutes les centrales de production électrique, qu'elles soient hydroélectriques, thermiques ou nucléaires.

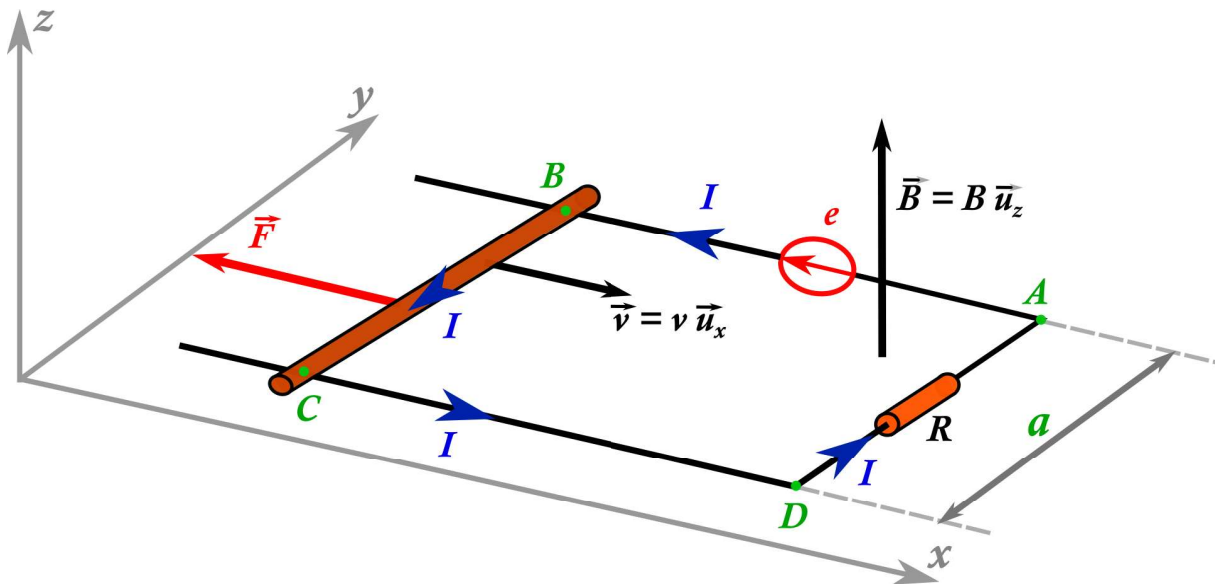


FIG. II.3. Expérience des rails de Laplace.

3. Induction : circuit mobile dans un champ fixe

3.1. Force exercée sur un circuit mobile dans un champ fixe

On considère la géométrie des rails de Laplace (voir Fig. II.3). Le barreau se déplace à la vitesse v , maintenue constante par un opérateur extérieur. On a la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt},$$

II. L'induction et l'énergie magnétique

avec $\phi = BS = Ba(l - vt)$ avec les conventions utilisées. D'où $e = Bav$ à vitesse de déplacement du barreau constante. La f.e.m. induite $e > 0$ génère un courant $i > 0$ dans le circuit résistif et donc une force de Laplace sur la barre BC. On calcule alors la force totale

$$\vec{F} = \int_B^C i d\vec{l} \wedge \vec{B}, \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -iaB\vec{u}_x}.$$

La force est opposée à la vitesse de déplacement.

3.2. Travail des forces de Laplace



Loi de Lenz

Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur.

Pour une transformation quasistatique de déplacement du rail, l'opérateur doit exercer une force

$$\vec{F}_{\text{op}} = -\vec{F},$$

et le travail correspondant

$$\delta W_{\text{op}} = \vec{F}_{\text{op}} \cdot \vec{v} dt,$$

de puissance mécanique

$$\mathcal{P}_{\text{op}} = \vec{F}_{\text{op}} \cdot \vec{v} > 0.$$

D'où

$$\mathcal{P}_{\text{op}} = Biav = \frac{B^2 a^2 v^2}{R}.$$

Cette puissance est directement utilisée dans le circuit électrique, de puissance $\mathcal{P}_{\text{elec}} = ei$. D'où le bilan d'énergie suivant

$$\mathcal{P}_{\text{elec}} = ei = \frac{e^2}{R} = \frac{B^2 a^2 v^2}{R} = \mathcal{P}_{\text{op}}.$$

La force de Laplace s'oppose au mouvement, l'opérateur doit "forcer" pour déplacer le barreau. Ainsi, l'énergie déployée mécaniquement est transformée en énergie électrique : on a une **conversion d'énergie électromécanique**. Dans ce modèle simple, le rendement est de 100%. Dans les machines électromécaniques réelles, de nombreux phénomènes limitent le rendement : pertes cuivre, pertes fer, fuites de flux magnétique, etc...

4. Autoinduction

On considère une spire parcourue par un courant I , générant un champ magnétique \vec{B} . Ce champ magnétique génère un flux ϕ à travers la spire, proportionnel à B et donc à I . La relation entre le flux et le courant est linéaire, définissant l'autoinductance du circuit

$$\boxed{L = \frac{\phi}{I}}.$$

Il s'agit de l'équivalent de la capacité en électrostatique

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Exemple : calcul de l'autoinductance d'un solénoïde Dans un solénoïde de densité linéique de spire n , parcouru par un courant I , dans l'approximation du solénoïde infini le champ B à l'intérieur est homogène et $B = \mu_0 n I$. Alors, pour un solénoïde de longueur l , le flux magnétique total ϕ à travers le solénoïde vaut

$$\phi = BnlS = \mu_0 n^2 l S I,$$

avec S la section du solénoïde. On obtient alors le coefficient d'auto-induction d'un solénoïde de densité linéique de spires n , de longueur l et de section S

$$L = \mu_0 n^2 l S.$$

On remarquera que le coefficient d'auto-induction ne dépend que de la géométrie du circuit. Désormais on se place en convention récepteur du point de vue électrique pour la bobine. Ainsi, le sens positif du flux est défini par le sens positif du courant. Alors

$$\phi = BS = LI.$$

Et d'après la loi de Faraday, une f.e.m. est induite aux bornes de la spire, **en convention générateur**, selon

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Soit U la tension aux bornes de la bobine **en convention récepteur** : $U = -e$, soit

$$U = L\frac{dI}{dt}.$$

On retrouve le relation entre tension et courant aux bornes d'une bobine en convention récepteur (voir cours d'électronique, HLP104 - Physique Générale S1).

5. Énergie magnétique dans une bobine

On admet que dans un circuit filiforme parcouru par un courant I délivré par une source extérieure, l'énergie potentielle associée aux forces de Laplace est donnée par la relation

$$E_p = -I\phi,$$

où ϕ est le flux à travers le circuit considéré. Dans le cas de l'auto-induction, cette relation n'est plus valable car c'est le courant I qui est la source du champ magnétique à l'origine du flux ϕ . Pour calculer l'énergie magnétique d'autoinduction dans une bobine, on considère la transformation suivante

Etat initial	=>	Etat final
$I = 0$		$I = I_0$
$\phi = 0$		$\phi = \phi_0$

On considère un état intermédiaire (I, ϕ) de la transformation. Un opérateur augmente le courant de δI en exerçant un travail δW avec un générateur de f.e.m. U pendant δt . On a alors

$$\delta W = IU\delta t = LI\delta I.$$

Le travail total de l'opérateur W lors de la transformation s'exprime alors selon

$$W = \int_{I=0}^{I=I_0} LI\delta I = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

On obtient ainsi l'énergie magnétique E_{mag} emmagasinée par une bobine parcourue par un courant I_0 selon

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

Exemple : cas d'un solénoïde. On considère une bobine de densité linéique de spire n , de longueur l et de section S , parcourue par un courant I_0 . On a alors une énergie magnétique E selon

$$E = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{\mu_0 n^2 l S I_0^2}{2} = \frac{\mu_0^2 n^2 I_0^2}{2\mu_0} l S = \frac{B^2}{2\mu_0} V,$$

II. L'induction et l'énergie magnétique

où V est le volume de l'espace où règne un champ magnétique B .

Ainsi, l'énergie magnétique est localisée là où il existe un champ magnétique, sous la forme d'une densité volumique d'énergie magnétique e_{mag}

$$e_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Remarque : on peut effectuer le même raisonnement en électrostatique dans le cas d'un condensateur plan infini et montrer que la densité d'énergie électrostatique $e_{\text{élec}}$ peut se mettre sous la forme

$$e_{\text{élec}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Applications : bougies d'allumage des moteurs thermiques, le haut-parleur, le microphone, le moulage par induction électromagnétique, les plaques à inductions, etc ...

Compléments au chapitre *L'induction et l'énergie magnétique*

1. Actionneurs électromécaniques

Les actionneurs électromécaniques exploitent la force de Laplace pour engendrer une force mécanique ou un déplacement à partir d'électricité. Par exemple, ils ont été utilisés pour réaliser les premières sonnettes (Fig. II.4). Il s'agit d'une forme assez simple d'actionneur électromécanique, basé sur l'utilisation d'électro-aimants. Un électro-aimant est un bobinage de fil, permettant de générer un champ magnétique (éventuellement exalté à l'aide d'un noyau de fer). Ce champ magnétique permet de déplacer un aimant permanent, provoquant ainsi un déplacement actionné électriquement. Ils sont couramment utilisés en milieu industriel avec les électrovannes, mais également avec l'utilisation de moteurs électriques, qui sont une forme de conversion électromécanique.

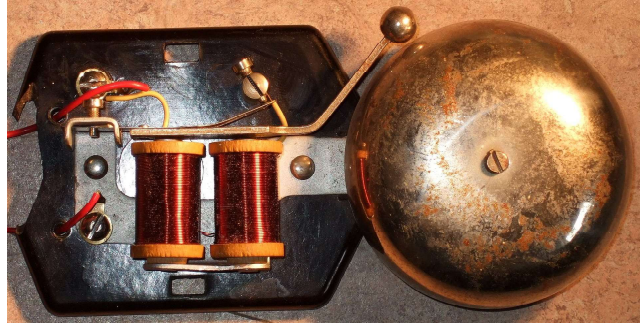


FIG. II.4. <https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnet>

2. Expérience historique de Faraday

Dessin de l'expérience de Michael Faraday en 1831 montrant l'induction électromagnétique entre les bobines de fil, à l'aide d'un appareil du 19^e siècle, tiré d'un manuel de 1892 sur l'électricité. À droite se trouve une batterie liquide qui fournit un courant qui circule à travers la petite bobine de fil créant un champ magnétique. Lorsque la petite bobine est à l'arrêt, aucun courant n'est induit. Cependant, lorsque la petite bobine entre ou sort de la grande bobine, la variation du flux magnétique induit un courant dans la grande bobine. Ceci est détecté par la déviation de l'aiguille dans l'instrument galvanométrique sur la gauche.

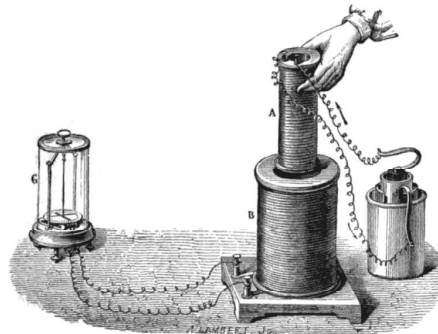


FIG. II.5. https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_induction

3. Principe de l'alternateur

Le mot dynamo est l'abréviation de "machine dynamoélectrique". La dynamo désigne une machine électrique qui fonctionne en générateur électrique. Elle convertit l'énergie mécanique en énergie électrique sous forme de tension continue, en utilisant l'induction électromagnétique. On parle de conversion électromécanique.

II. L'induction et l'énergie magnétique



FIG. II.6. Dynamo de vélo. Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bicycle_dynamo.jpg

Cet entraînement mécanique peut être réalisé par une roue à aubes elle même entraînée par un écoulement d'eau dans un barrage hydroélectrique, ou par de la vapeur d'eau dans une centrale thermique ou nucléaire. La grande majorité (> 90%) des sources d'énergie électrique sont basées sur l'entraînement d'un rotor d'alternateur, y compris dans les énergies renouvelables (éoliennes ou systèmes de turbines marée-motrices).

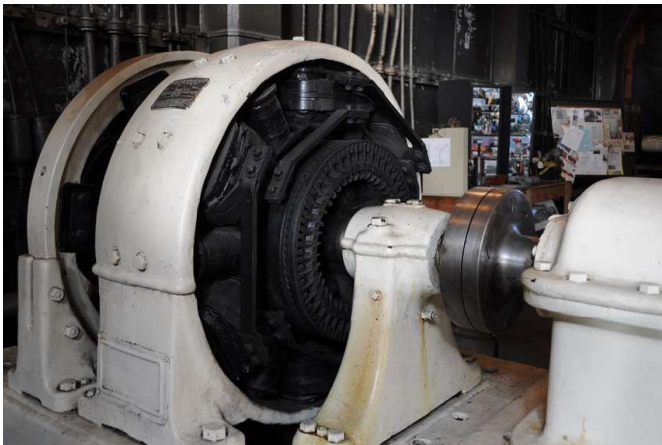


FIG. II.7. General Electric DC generator (Georgetown PowerPlant Museum, Georgetown, Seattle, Washington). Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9n%C3%A9rateur_%C3%A9lectrique

Sources :

— https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9n%C3%A9rateur_%C3%A9lectrique

La dynamo est moins utilisée que l'autre type de générateur, les alternateurs, étant en général un peu plus coûteuse et de moindre rendement. Le principe d'une dynamo repose sur l'induction, à partir d'une bobine tournant dans un champ magnétique permanent. Un système dit de balais collecteurs permet de changer périodiquement les connexions au niveau de la bobine afin d'avoir une tension quasi-continue délivrée en sortie. Au début du XXe siècle, la production d'électricité pour alimenter les tramways était réalisée à l'aide de machines à vapeur et de dynamos. Les dynamos de vélo sont en réalité des alternateurs, qui, à partir d'un mouvement de rotation, génère un courant alternatif (Fig. II.6). L'invention de la dynamo est attribuée à Ányos Jedlik¹ (1800-1895), ingénieur et physicien hongrois, avec un premier prototype en 1828 (alors que les phénomènes d'induction électromagnétique ont été formalisés par Faraday en 1831²). Une autre approche consiste à générer des courants alternatifs, en faisant tourner un aimant devant une spire de courant : ce sont les alternateurs. Un alternateur est une machine électrique composée de deux éléments clés : un *rotor* et un *stator*. Le rotor est une pièce tournante, entraînée par un système mécanique extérieur.

Ce rotor en mouvement permet de gérer un champ magnétique tournant. Pour cela, soit un aimant permanent est solidaire du rotor, soit une bobine alimentée par une source de courant externe est solidaire du rotor. Le stator est l'élément statique de la machine électrique alternateur. C'est un élément fixe, constitué d'un bobinage. Ce bobinage, soumis à un champ magnétique variable, va être le lieu du phénomène d'induction, et résulte en l'apparition d'un champ électrique. Pour un champ magnétique tournant, le flux varie sinusoïdalement en première approximation, résultant en une tension induite sinusoïdale.

Les sources de type panneaux solaires reposent sur des mécanismes différents, de conversion de la lumière en électrons (dispositifs photoniques).

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%81nyos_Jedlik

2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday

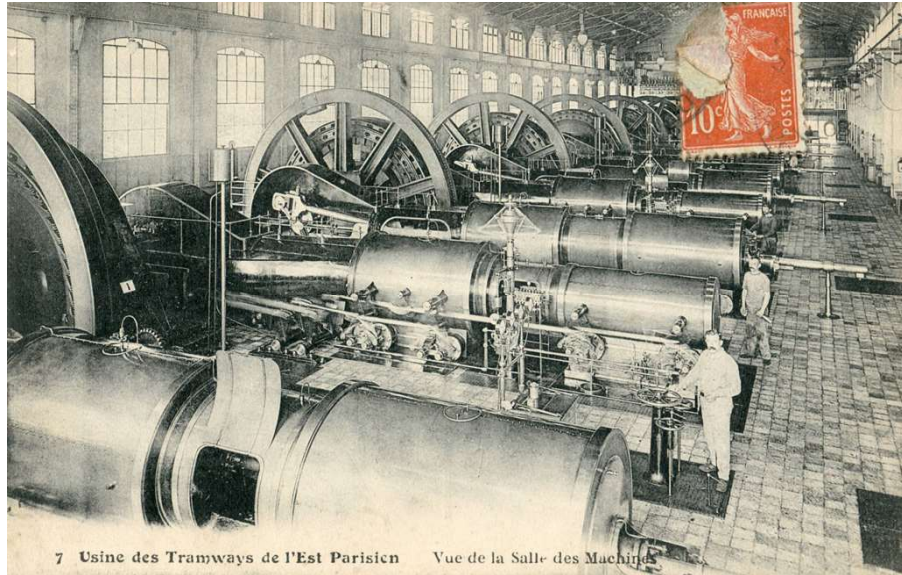


FIG. II.8. Machines à vapeur et dynamos d'une usine de production électrique de la Compagnie des tramways de l'Est parisien. Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamo>

4. Centrales électriques

Une centrale électrique est une installation industrielle permettant de générer de l'électricité, avant sa distribution dans le réseau électrique. La puissance délivrée par une centrale électrique est importante, afin de pouvoir alimenter le maximum de sites industriels ou bâtiments (bureaux, logements) en électricité. Il existe différents types de centrales électriques. Les centrales thermiques reposent sur la combustion d'un carburant (gaz, charbon, fioul, pétrole). La chaleur issue de cette combustion permet de vaporiser de l'eau liquide et produire de la vapeur sous pression. Cette eau sous pression est utilisée pour exercer une force sur une roue à aubes par détente de la vapeur. Ce mouvement de rotation permet de faire tourner un alternateur et donc de produire de l'électricité (tension alternative). On peut montrer que la puissance délivrée par un alternateur est proportionnelle au carré du flux maximal dans le stator. Ainsi, pour produire une puissance importante, il faudra utiliser des rotors et des stators de grandes tailles. Par exemple, le rotor d'une centrale hydroélectrique est représenté Fig. II.9.



FIG. II.9. Rotor d'une centrale hydroélectrique.

Dans une centrale nucléaire, le rotor de l'alternateur est toujours entraîné par de la vapeur d'eau sous pression, mais le combustible permettant sa vaporisation est un combustible nucléaire. La réaction nucléaire en jeu est la fission de l'uranium 235 (^{235}U) suite à l'absorption d'un neutron. Le circuit d'eau en contact du combustible nucléaire est dans un circuit isolé (pour des raisons de sécurité, cette eau étant radioactive). Un échangeur thermique permet d'échauffer une seconde circuit d'eau qui va se vaporiser et permettre la rotation

II. L'induction et l'énergie magnétique

du rotor. Le principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire est décrit Fig II.10 et à l'adresse suivante : <http://www.sfen.org/energie-nucleaire/ca-marche/fonctionnement-centrale-nucleaire>.

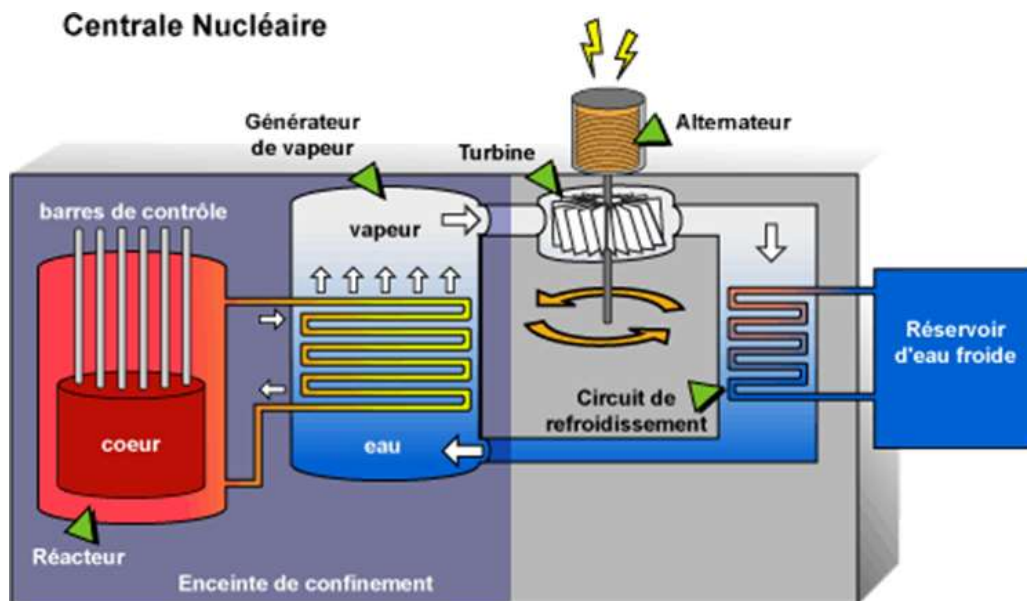


FIG. II.10. Principe d'une centrale électrique nucléaire. Source : <http://www.energies-services.org/page410-409-la-centrale-electrique.html>

Les centrales hydroélectriques utilisent l'énergie potentielle de pesanteur de l'eau stockée dans un barrage. Dans ces centrales, l'eau chute depuis le haut du lac de stockage vers une roue à aube qui est entraînée dans un mouvement de rotation à son passage. Ce mouvement de rotation permet de faire tourner le rotor d'un alternateur et donc de produire de l'électricité. Le principe de fonctionnement d'une centrale hydroélectrique est décrit dans la vidéo EDF disponible à l'adresse suivante : <https://www.youtube.com/watch?v=vqdbbigU900>. Une partie des sources d'énergie électrique renouvelables sont également basées sur le mouvement de rotation d'un rotor. Dans le cas des éoliennes, une hélice est solidaire du rotor et permet ce mouvement de rotation grâce à l'énergie des vents Fig. II.11. Dans le cas des centrales marémotrices, ce sont les déplacements d'eau dus aux marées qui permettent d'entraîner le mouvement de rotation des hélices. La répartition des différentes sources d'énergie du réseau électrique en 2006 est décrite Tab. II.1. Le nucléaire présente pour principal inconvénient de ne pas pouvoir facilement adapter la production à la demande (il n'est pas facile de changer rapidement la puissance produite par une centrale nucléaire). On utilise un *mix énergétique* entre plusieurs sources d'énergie de capacités de production et d'adaptabilités à la demande complémentaires. Pour cela, on utilise des sources à puissance fixe (comme le nucléaire) couplées à des sources de moindre puissance mais plus facilement ajustables (gaz, hydroélectrique). Les *centrales de production de masse* ont des temps de réponse lents (quelques heures) mais des puissances de l'ordre de la centaine de GW. Ce sont typiquement les centrales nucléaires et thermiques. Les *centrales de production intermédiaire* ont des puissances inférieures au GW mais avec des temps de réponse bien plus rapides.

	En Allemagne	En France
Nucléaire	12,5%	85,8%
Gaz	23%	4,1%
Charbon	24%	3,2%
Fioul	0%	1,8%
Renouvelable	4,5%	4,7%
Pétrole	36%	0%

TABLE II.1 – Mix énergétique en Allemagne et en France en 2006. Source : *Electrotechnique et énergie électrique*, Dunod, Luc Lasne.

On pourra citer notamment les centrales thermiques à charbon, pétrole et gaz, voir les centrales hydroélectriques. Les *centrales de production de pointe* sont des centrales de production très rapides (quelques minutes) mais avec des puissances inférieures à 100 MW. Il s'agit essentiellement des centrales hydroélectriques et des centrales hydroélectriques à station de pompage pour le stockage de l'énergie. Le réseau domestique français est constitué d'une tension alternative monophasée, de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et de valeur efficace $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$. Les tensions du réseau sont normalisées suivant leurs valeurs (hautes tensions HTA, hautes tensions HTB, basses tensions). Le nucléaire présente pour principal inconvénient de ne pas pouvoir facilement adapter la production à la demande. On utilise un *mix énergétique* entre plusieurs sources d'énergie de capacités de production et d'adaptabilité à la demande complémentaires. Pour cela, on utilise des sources à puissance fixe (comme le nucléaire) couplées à des sources de moindre puissance mais plus facilement ajustables (gaz, hydroélectrique).

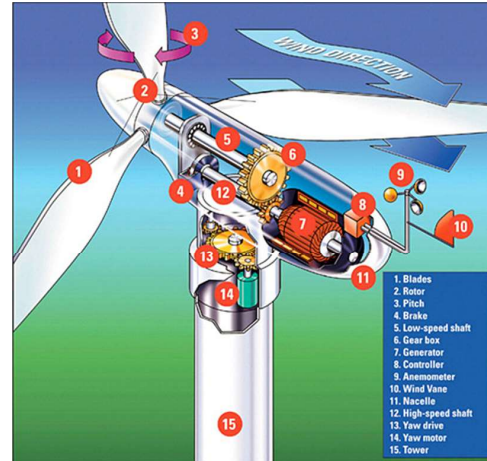


FIG. II.11. Principe de fonctionnement d'une éolienne. Source : <https://sites.google.com/site/kaufmanwindenergy/background-information-on-wind-turbines>

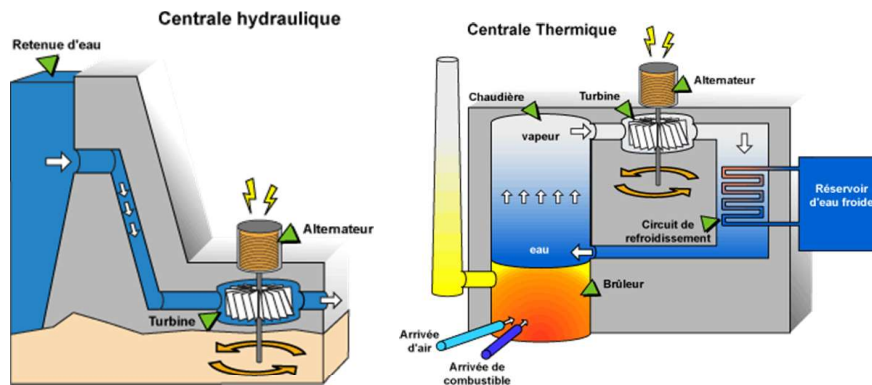


FIG. II.12. Centrale hydroélectrique et centrale thermique. Source : <http://www.energies-services.org/page410-409-la-centrale-electrique.html>

5. Nikola Tesla

Nikola Tesla est un ingénieur d'origine serbe, né en 1856 à Smijan (empire d'Autriche, actuelle Croatie) et mort en 1943 à New-York. Il est connu pour sa contribution au développement des technologies de production de courant alternatif et son utilisation pour le transport et la distribution de l'électricité. On lui donne également une contribution scientifique au développement de la turbine, les ampoules fluorescentes (tubes néon), les radiocommunications, le radar,... Tesla, ingénieur formé à l'Université Charles de Prague puis à l'Université technique de Graz, a commencé sa carrière en travaillant dans la téléphonie et l'ingénierie électrique. Puis il a émigré aux États-Unis en 1884 en travaillant avec Thomas Edison³ puis George Westinghouse⁴. Il a déposé plus de 300 brevets, protégeant 125 inventions. Il a notamment développé de nouvelles méthodes pour

3. Thomas Edison est le fondateur de la General Electric. Pionnier de l'électricité, scientifique, vulgarisateur, il a déposé 1093 brevets. Parmi ses inventions les plus connus, on peut citer le télégraphe, le microphone, la centrale électrique à courant continu mais surtout, la plus connue, la lampe à incandescence.

4. George Westinghouse est un ingénieur et entrepreneur américain, fondateur de l'entreprise de matériel électrique qui porte son nom. Ami de Nikola Tesla, il était l'un des principaux concurrents de Thomas Edison lors des débuts de l'électricité aux États-Unis. Il

II. L'induction et l'énergie magnétique

la conversion électromécanique de l'énergie, c'est-à-dire produire du mouvement à partir d'électricité, mais également l'inverse, produire de l'électricité à partir d'un mouvement mécanique.

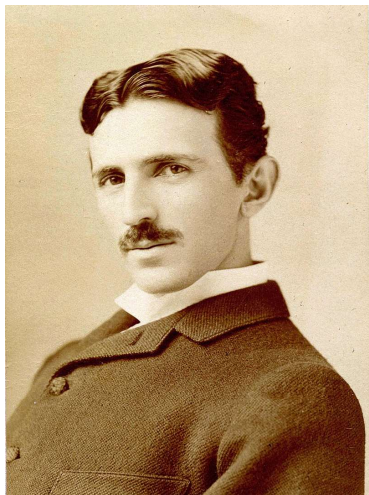


FIG. II.13. Nikola Tesla, à l'âge de 34 ans (1890). Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tesla_Sarony.jpg

Il a mis au point les premiers alternateurs, dispositifs permettant la génération d'une tension alternative à partir d'un mouvement mécanique de rotation. Cette technologie a permis le développement ensuite des réseaux électriques de distribution en courant alternatif. Il a également développé les premiers moteurs asynchrones. Un moteur électrique est un système permettant de convertir de l'énergie électrique en mouvement de rotation. Les premières machines électriques ont exploité des tensions continues, correspondant au développement des machines dites à courant continu, nécessitant l'utilisation d'un commutateur de courant, inventé en 1832 par William Sturgeon. Le premier moteur électrique à courant continu destiné à la commercialisation a été inventé par Thomas Davenport en 1834 (breveté en 1837). Mais le coût important des batteries de l'époque empêcha son déploiement industriel. Le processus inverse, la génération d'électricité à partir de mouvement, a également été réalisé dans un premier temps pour la production de tension continue, le mécanisme physique des moteurs électriques étant réversible (démonstré par Antonio Pacinotti en 1864). C'est grâce à l'invention du collecteur, en 1869, par Zénobe Gramme que le développement des génératrices électriques à courant continu fut possible. En 1871, il présente à l'Académie des sciences à Paris le premier prototype de génératrice électrique industrielle continue (que l'on appela alors *machine de Gramme*). La première application industrielle de la transmission électrique de l'énergie fut réalisée par Hippolyte Fontaine en 1873 à l'exposition de Vienne. Il a alors démontré la possibilité de transférer de l'énergie sur une distance de 2km, à l'aide d'une dynamo et d'un moteur à courant continu reliés par des fils électriques. Cette expérience fût décisive, l'énergie mécanique n'étant jusqu'alors pas transportable, provenant de l'énergie des cours d'eau.

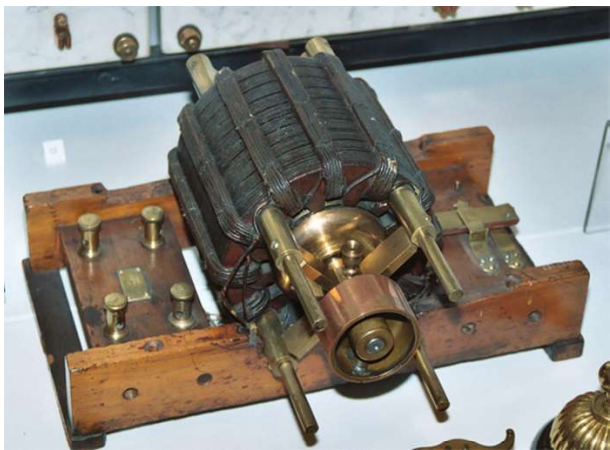


FIG. II.14. Moteur asynchrone développé par Nikola Tesla (Tesla Museum, Belgrade). Source : https://www.teslasociety.com/hall_of_fame.htm

En 1886, Tesla a également contribué à ce développement des génératrices par le dépôt d'un brevet intitulé *Dynamo-electric machine* en 1886 (US patent #US359748A). Une deuxième étape décisive dans le développement des technologies électriques fut le développement des machines électriques à courant alternatif, plus adapté au transport efficace de l'énergie électrique. Tesla a contribué au développement de moteurs électriques alimentés en courant alternatif. La première technologie proposée est celle de la machine asynchrone. Elle repose sur l'utilisation d'un champ magnétique tournant pour le fonctionnement en moteur, et la mise en rotation d'un aimant (ou d'une bobine alimentée par un courant électrique) pour un fonctionnement en génératrice électrique. Le principe de fonctionnement des machines asynchrones est réversible. La paternité de l'invention de la machine asynchrone est controversée, avec potentiellement trois inventeurs. Nikola Tesla a dé-

est reconnu pour sa contribution dans l'industrie des télécommunications et des chemins de fer. Au cours de sa carrière, il a déposé 361 brevets et fondé soixante entreprises.

posé un brevet intitulé *Electro-Magnetic Motor* en 1888 (US patent #US382279A), mais en parallèle, Galileo Ferraris a publié un traité sur les machines tournantes et une théorie du moteur asynchrone en avril 1888. En 1889, un électricien allemand, Michail Ossipowitsch Doliwo-Dobrowolski, invente le premier prototype de moteur asynchrone à courant triphasé (à dispositif dit de "cage d'écureuil"), déployé ensuite industriellement à partir de 1891.

Nikola Tesla s'est essentiellement intéressé aux technologies liées à l'électricité. Si James Clerk Maxwell a établi les fondements théorique de l'électromagnétisme et des ondes électromagnétiques, Tesla a contribué à sa mise en pratique d'un point de vue technologique. Il a notamment utilisé les fréquences propres des composants électriques afin de maximiser leur rendement. Nikola Tesla a été l'employé d'Edison, ce dernier ayant reconnu en lui une forme de génie en matière d'électricité. Cependant, une rivalité profonde va naître entre les deux scientifiques. La génération des machines à courant continu ont été inventées avant celles à courant alternatif. Edison défendait alors un système d'électricité continue, car ce dernier était déjà installé un peu partout aux États-Unis. Tesla au contraire prônait le développement des installations en courant alternatif (qu'il a contribué à inventer), plus sûres et aux développements potentiels plus importants. Tesla quitta alors l'entreprise d'Edison pour fonder sa propre société. Ce fût le début de ce que l'on appela *la guerre du courant*. Humaniste avant tout, Nikola Tesla avait pour principal motivation l'objectif d'apporter gratuitement l'électricité dans les habitations. Edison et Westinghouse étaient au contraire des businessmen accomplis. Tesla a terminé sa vie dans des difficultés financières croissantes, passant d'un hôtel à un autre quand il se révélait incapable de payer ses factures. Très attaché à ses racines serbes, il était un fervent amateur de la poésie de son pays d'origine et a écrit des poèmes jusqu'à la fin de sa vie. Nikola Tesla était un personnage mystérieux et solitaire. Il s'est construit une image de "savant fou", avec un sens élevé de la mise en scène pour la présentation de ses inventions.

Ces mises en scènes avaient pour but de séduire les investisseurs, dans une stratégie très moderne à l'époque de promotion de ses inventions brevetés, afin de pouvoir vendre ces dernières. Il s'est notamment transformé en fabricant d'illusions. Il a notamment exploité sa connaissance des lois de l'électricité pour s'exposer à des tensions très élevées, sans dangers physiologiques compte tenu des faibles courants en jeu. Il a également au recours aux premières *fake news*, avec la fabrication de photos truquées à double exposition, notamment une célèbre photo de 1899 le montrant assis sur une chaise en train de lire paisiblement, dans son laboratoire de Colorado Springs, au milieu de gigantesques éclairs (Fig. II.15). Tesla souffrait de nombreuses phobies, d'obsessions et de troubles mentaux. Durant son enfance, il était victime de cauchemars fréquents et d'hallucinations. Il possédait une forme d'hypersensibilité le rendant capable de percevoir des odeurs ou des vibrations à peine perceptibles pour le quidam moyen. Il avait une phobie des germes et répugnait à serrer la main de ses interlocuteurs. Les phobies de Tesla en faisaient une personne incapable de toute relation intime. Mystérieux et solitaire, il ne se maria jamais, tout en étant fort courtisé. Il n'a pas eu de descendance connue. Sa sépulture est à Belgrade, en Serbie, dans le musée Nikola Tesla.

Nikola Tesla était un inventeur visionnaire. Il prédisait le potentiel révolutionnaire de l'énergie électrique pour le milieu industriel. Il a en prédit l'utilisation prochaine pour le chauffage domestique et la cuisine (électrification des habitations et électroménager). Il envisageait également les sources d'énergies à base de technologies éolienne, solaire et hydroélectrique. Dans une lettre au banquier J.P. Morgan, il décrit le potentiel de ses technologies dans le domaine des télécommunications, évoquant des installations capables de transmettre



FIG. II.15. Nikola Tesla (Tesla Museum, Belgrade). Source : <https://www.history.com/news/nikola-tesla-files-declassified-fbi>

II. L'induction et l'énergie magnétique

des messages, des récepteurs permettant d'imprimer le journal à domicile et des systèmes permettant d'écouter partout un discours ou un air de musique, quelle que soit la distance. Il a pressenti dès le début la société de l'information globale actuelle.

Son imagination foisonnante a donné lieu à plusieurs inventions jamais exploitées commercialement : un prototype de navire radiopiloté et une turbine sans aubes (composée de disques très rapprochés, la viscosité du fluide permettant leur entraînement). D'autres inventions n'ont pas franchi le cap de la théorie. Il a notamment proposé un projet d'avion à décollage vertical, qui finalement était une anticipation des fusées spatiales actuelles. Il a également développé une théorie du *rayon de la mort*, une arme à énergie dirigée. Cette idée a été reprise à la fin du XXI^{ème} siècle dans le cadre de l'initiative de défense stratégique (dite *guerre des étoiles*). Cette arme avait pour objectif de protéger tout pays attaqué par voie aérienne. Cependant, les dispositifs proposés dans l'initiative de défense stratégique étaient basés sur l'émission d'un rayonnement, alors que Nikola Tesla avait proposé un système basé sur des jets de particules de mercure accélérées à très grande vitesse. L'énergie nécessaire pour rendre le système efficace était trop importante pour que cette invention soit réalisable expérimentalement. Nikola Tesla en fit néanmoins la promotion auprès de la Société des Nations, notamment le gouvernement britannique et l'union soviétique. Plutôt que de risquer que la technologie du *rayon de la mort* de Tesla tombe dans les mains d'ennemis des États-Unis, inquiet de la démarche entreprise par Nikola Tesla, le FBI saisit tous les documents de sa chambre d'hôtel à New-York, où il est mort en 1943, en pleine guerre mondiale. Le mystère autour du contenu de ces documents a résulté en de nombreuses théories du complot. Le FBI a finalement rendu public 250 pages de documents liés à Nikola Tesla (<https://vault.fbi.gov/nikola-tesla>) en vertu de la loi *Freedom of Information Act* de 2016, puis publié deux communiqués, dont le dernier en mars 2018. Malgré la publication de ces documents, de nombreuses questions restent sans réponses, et certains travaux de Tesla sont toujours manquants. Trois semaines après la mort de Tesla, le FBI a chargé John G. Trump⁵, ingénieur au MIT, d'évaluer le contenu des documents récupérés. Ce dernier a conclu que les travaux de Tesla étaient "principalement de nature spéculative, philosophique et promotionnelle" et que les documents ne contenaient "pas de nouveaux principes ou méthodes solides et réalisables pour obtenir de tels résultats".

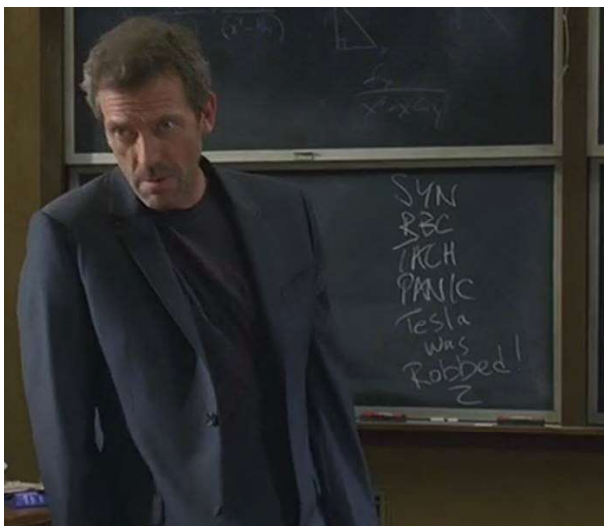


FIG. II.16. Extrait de *Dr. House*, saison 4, épisode 2. En arrière plan, la mention "Tesla was robbed" est inscrite au tableau, en référence à l'incident entre Thomas Edison et Nikola Tesla.

En hommage à ses réalisations, la société de fabrication de voitures électriques cofondée par Elon Musk a été baptisée Tesla Motors. En 1960, son nom a également été choisi pour désigner l'unité du champ magnétique. Personnage fascinant, l'auteur de science fiction Christopher Priest en fit une figure centrale de son roman *Le Prestige*, adapté au cinéma en 2006 par Christopher Nolan, où le rôle de Nikola Tesla est joué par David Bowie. Dans un épisode de la série *Dr. House*, une référence à la rivalité entre Edison et Tesla est subtilement introduite dans l'épisode 2 de la saison 4. Dans cet épisode, House a pour patiente une pilote de chasse de la NASA, et effectue le diagnostic différentiel dans un amphithéâtre avec plusieurs dizaines de médecins, en compétition pour intégrer sa nouvelle équipe. Sur le tableau en arrière-plan, il est possible de lire la phrase "Tesla was robbed". Cette phrase fait référence à l'incident qui a poussé Tesla à démissionner de l'entreprise d'Edison. En 1884, Tesla propose à Edison d'adopter une technologie à courant alternatif, plutôt que courant continu, permettant selon lui de résoudre de nombreux problèmes du réseau électrique New-Yorkais. Parmi ces problèmes, il y a notamment des chutes de tension et une impossibilité de propagation de l'énergie sur une longue distance, imposant d'avoir une centrale

5. John G. Trump est également l'oncle du 45^{ème} président des États-Unis, Donald J. Trump (https://fr.wikipedia.org/wiki/John_George_Trump).

de production tous les deux à trois kilomètres. Il faut également produire l'énergie directement à la valeur de la tension d'utilisation, nécessitant un circuit de distribution différent pour chaque type d'appareil : éclairage public ou domestique, moteurs d'usine,... Mais adopter la solution de Tesla obligerait Edison à revoir totalement son système industriel et son fondateur à renoncer aux redevances qu'il percevait sur ses brevets ! Fondé sur un système de distribution à 5 câbles - contre 3 pour le continu -, le courant alternatif entraînerait, en outre, une consommation de fil de cuivre beaucoup plus importante, donc une hausse sensible des coûts d'installation. La mise en oeuvre d'un système de distribution utilisant le courant alternatif nécessite des connaissances très pointues en physique et en mathématiques, des connaissances que Thomas Edison n'a pas. Edison refuse d'adopter la solution de Tesla, mais lui promet une récompense de 50 000 dollars⁶ s'il parvient à mettre au point un système fiable à courant alternatif. Après plusieurs mois de travail, il présente à Thomas Edison une génératrice alternative avec des performances améliorées. Mais lorsqu'il demande sa récompense, Thomas Edison lui répond qu'il s'agissait d'une plaisanterie et qu'il n'y avait aucune récompense à la clé. Plutôt que 50 000 dollars, il lui propose une augmentation de 10 dollars par semaine. Tesla démissionna et fonda son entreprise, la *Tesla Electric Light Company*. Sous pression des investisseurs, il démissionnera de l'entreprise qu'il a fondé deux ans plus tard, perdant les économies qu'il avait investi mais également en perdant la jouissance de ses brevets. Il sera ensuite embauché par George Westinghouse pour travailler dans son entreprise de matériel électrique.

Sources :

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Nikola_Tesla
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Edison
- https://fr.wikipedia.org/wiki/George_Westinghouse
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Guerre_des_courants
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_%C3%A9lectrique
- <https://www.lesechos.fr/2014/07/nikola-tesla-contre-thomas-edison-la-guerre-des-courants-1103109>
- <https://patents.google.com/patent/US359748>
- <https://patents.google.com/patent/US382279>
- https://www.francetvinfo.fr/culture/spectacles/tesla-ses-confidences-electriques-spectacle-total-sur-un-genie-d-exception_3284179.html
- <https://www.books.fr/mille-vies-de-nikola-tesla/>
- <https://www.history.com/news/nikola-tesla-files-declassified-fbi>
- <https://vault.fbi.gov/nikola-tesla>

6. Bougies d'allumage des moteurs thermiques

Dans un moteur thermique, l'allumage est le mécanisme permettant d'initier la combustion du gaz combustible dans la chambre de combustion des cylindres du moteur. Le carburant est pulvérisé dans la chambre de combustion par les injecteurs (ou carburateurs). Dans les premiers moteurs, on utilisait une lame de platine chauffée au rouge par un brûleur pour initier la combustion. Dans les moteurs modernes, on utilise des *bougies d'allumage*, qui amorcent l'inflammation à l'aide d'une étincelle électrique. Cette inflammation locale se propage ensuite de manière déflagrante (combustion rapide mais inférieure à la vitesse du son, accompagnée d'un bruit dit de déflagration). La chaleur issue de la combustion provoque une augmentation de la pression dans le cylindre et génère le mouvement moteur, suivie d'une détente (isotherme ou adiabatique suivant les cycles). Pour obtenir le maximum de puissance mécanique, il faut déclencher la combustion quand le volume de cylindre est minimal (après le temps de compression du mélange explosif {air+combustible}, quand le cylindre est en bout de course vers le haut : c'est le point mort haut (PMH), juste avant la redescende de piston). Cependant, la combustion n'est pas instantanée. Il faut donc l'initier légèrement avant le point mort haut. L'optimisation de ce délai est appelé le *réglage de l'avance à l'allumage*, définie comme l'angle de rotation du vilebrequin par rapport au point où l'étincelle est déclenchée, exprimé en degrés avant PMH. Si l'avance à l'allumage est trop importante, les cylindres auront à endurer des pressions et des températures trop importantes, entraînant une

6. équivalent à plus de 1,5 millions de dollars actuels !

II. L'induction et l'énergie magnétique

usure prématurée. Dans certaines conditions de fonctionnement, la combustion peut avoir lieu de manière non contrôlée par inflammation spontanée : c'est le phénomène de "cliquetis" (nom donné à cause du bruit produit par ce phénomène). Il peut être dû à une avance d'allumage trop importante, ou des taux de compression trop élevés. Dans le cas d'un moteur à plusieurs cylindres, le moteur est muni d'un seul système d'allumage, couplé à un système de distribution électrique appelé "delco" ou "tête de delco", en référence à AC Delco, le premier fabricant de ce type de dispositifs. Certains moteurs n'ont pas de système de distribution des allumages, mais cela nécessite d'utiliser plusieurs bobines d'allumage pour alimenter chaque bougie. La bougie d'allumage doit pouvoir générer des milliers d'arcs électriques par minute, tout en résistant à la chaleur et à la pression des cylindres du moteur. La bougie d'allumage a fait son apparition en 1876 sur un moteur Lenoir. Son développement commence réellement à partir de 1902, lorsque Bosch la couple à la technologie permettant de générer de l'électricité à partir du mouvement du moteur (la *magnéto d'allumage*).

Jusque dans les années 1990, les allumages étaient constitués

- d'une batterie de tension continue de 6V ou 12V ;
- d'un contacteur à clé (dit contacteur *Neiman*) mettant ou non sous tension le circuit ;
- d'un interrupteur (le rupteur) composé de deux parties, une fixe et une mobile, permettant d'ouvrir ou fermer le circuit suivant la position angulaire de l'arbre moteur ;
- d'un condensateur monté en dérivation aux bornes du rupteur ;
- d'un système de correction à l'avance à l'allumage ;
- d'une bobine d'allumage composée de deux enroulements inductifs : un circuit primaire et un circuit secondaire générant la tension électrique suffisamment élevée pour permettre le claquage, c'est-à-dire la formation d'une étincelle ;
- un distributeur haute tension ;
- de bougies d'allumage.

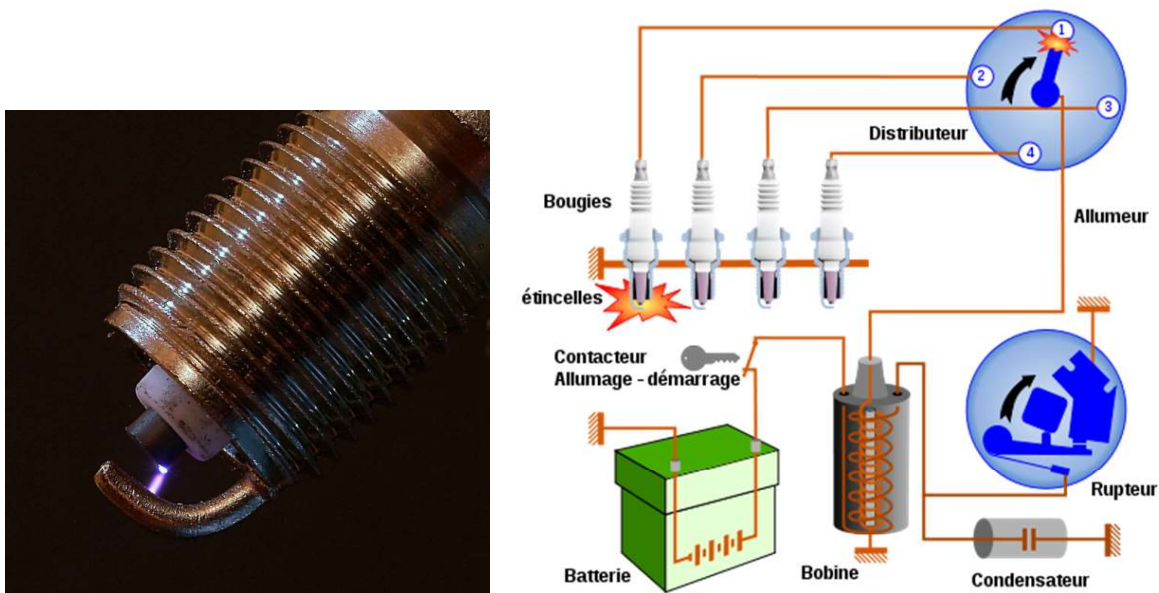


FIG. II.17. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Bougie_d'allumage, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Allumage>

Lorsque le rupteur mobile se ferme, la bobine se charge progressivement, avec un courant maximal défini par la résistance du bobinage. Une fois que le rupteur s'ouvre, la bobine impose cependant la continuité du courant à ces bornes. Ce dernier continue alors de circuler et l'énergie emmagasinée dans la bobine permet de charger le condensateur monté en parallèle avec le rupture, il permet d'absorber la surtension à l'ouverture du circuit inductif. Cette surtension peut atteindre 300 V au primaire de la bobine, ce qui correspond à 10 000 V au secondaire. C'est cette surtension qui permet d'atteindre la tension de claquage au niveau des bougies d'allumage. Cette tension monte à 10 kV en un temps très court, typiquement 10 μ s. Désormais, dans

les moteurs modernes, l'allumage est électronique, où une partie importante du système, voir l'intégralité, a été remplacé par des composants électroniques, sans éléments mobiles donc sans usure. L'allumage électronique de première génération est un allumage *transistorisé à rupteurs*. Dans ces systèmes, le rupteur n'a plus qu'un rôle de déclencheur d'un transistor de commutation, ce dernier permettant de commuter l'alimentation de la bobine primaire. Les dispositifs de seconde génération sont dits *transistorisés inductifs ou à effet Hall*. Dans ces derniers, il n'y a ni rupteurs, ni condensateurs. Le système est inductif, par génération d'impulsions dans l'allumeur ou sur le vilebrequin, ou basé sur l'effet Hall, afin de produire des signaux sinusoïdaux. Ces signaux sont amplifiés, permettant de connaître à tout instant la position angulaire du vilebrequin et par conséquent synchroniser le déclenchement de l'allumage. Un système électronique adapté permet alors de commander le transistor en commutation d'allumage. Des systèmes d'allumage plus récents sont dits *allumages électroniques cartographiques*, où un microprocesseur possède en mémoire une cartographie des avances à l'allumage, en fonction de la vitesse de rotation du moteur et de la dépression régnant dans le collecteur d'admission. Les systèmes d'allumage de dernière génération intègrent de nouveaux paramètres. Ils permettent notamment la gestion de plusieurs carburants (essence et bio-éthanol par exemple), le style de conduite, la température des gaz, etc... Les véhicules modernes n'utilisent plus d'éléments soumis à l'usure mécanique. Les pannes sont dues désormais aux composants électroniques (calculateurs, surtensions, ruptures d'alimentations).

Sources :

- <https://fr.wikipedia.org/wiki/Allumage>
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Bougie_d'allumage

7. Exemple de couplage électromécanique : le haut-parleur

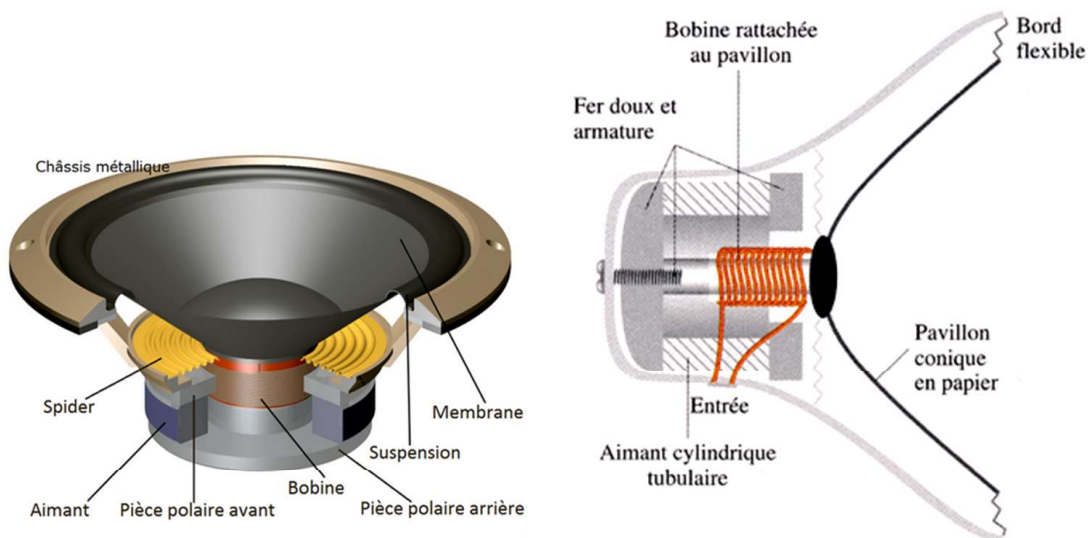


FIG. II.18. Description et vue en coupe d'un haut-parleur.

7.1. Description

Un haut-parleur est représenté schématiquement Fig. II.18, et sa modélisation est proposée Fig. II.19. Ce dernier est constitué d'un aimant permanent à symétrie cylindrique d'axe Ox . Ce dernier génère un champ magnétique \vec{B} homogène dans l'entrefer en norme, mais radial en direction selon $\vec{B} = B\vec{u}_r$, où \vec{u}_r est le vecteur unitaire radial du système de coordonnées cylindriques. Un bobinage de fil de cuivre est solidaire de la membrane du haut-parleur, cette dernière étant solidaire mécaniquement de l'aimant permanent, par une liaison que l'on modélise par un ressort. Lorsqu'un courant électrique parcourt la bobine, la force de Laplace induit un

II. L'induction et l'énergie magnétique

déplacement de cette dernière et donc de la membrane. C'est le fonctionnement haut-parleur, où une grandeur électrique est convertie en grandeur mécanique. Le processus est réversible. Ainsi, tout mouvement de la membrane (induit par une onde sonore) résulte en un déplacement de la membrane et donc du bobinage dans un champ magnétique statique. Il apparaît donc une f.e.m. d'induction aux bornes du bobinage ; c'est le principe du microphone.

7.2. Équation mécanique

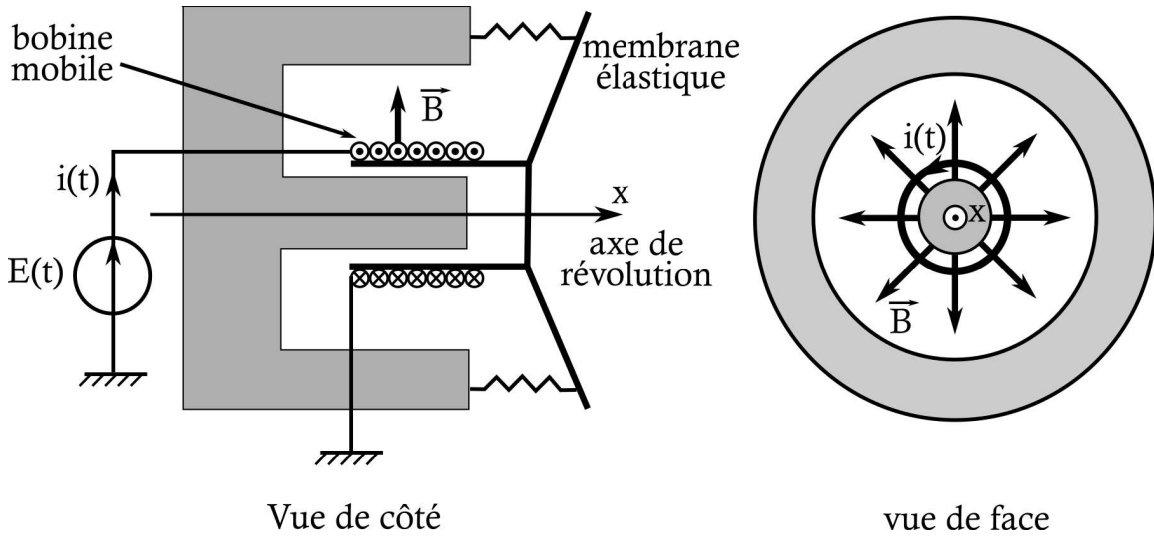


FIG. II.19. Description schématique d'un haut-parleur

Dans l'entrefer de l'aimant, il règne un champ magnétique radial

$$\vec{B} = B\vec{u}_r,$$

où B est constant tant que l'on est dans l'entrefer. Le système bobinage+membrane possède une masse totale m et peut être mis en mouvement par l'action d'une force extérieure $F\vec{u}_x$. On note x la position de la membrane, tel que $x = 0$ quand la membrane est à l'équilibre à courant nul $i = 0$. Il subit en outre des forces de frottement dissipatives de la forme

$$\vec{F}_{frott} = -h\dot{x}\vec{u}_x,$$

les forces de rappel de la membrane de la forme

$$\vec{F}_{rappel} = -kx\vec{u}_x,$$

ainsi que les sommes des forces de Laplace. Pour un élément du bobinage $d\vec{l} = dl\vec{u}_\theta$, on a

$$d\vec{F}_L = idl\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_x = -iBdl\vec{u}_x,$$

d'où l'expression de la force de Laplace

$$\vec{F}_L = -iBl\vec{u}_x,$$

où l est la longueur totale du bobinage.

En appliquant le Principe Fondamentale de la Dynamique au système bobinage+membrane, projeté sur l'axe \vec{u}_x , on obtient

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - kx - Bli + F,$$

où F est une force extérieure appliquée. On obtient l'équation mécanique (M) du système

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = -Bli + F.$$

7.3. Équation électrique

Soit $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ la vitesse de la membrane. On note $v = \dot{x}$. On a un circuit en mouvement dans un champ magnétique statique. Il faut évaluer le champ électromoteur⁷ (**hors-programme en HLPH412**)

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = Bv\vec{u}_\theta.$$

On obtient la f.e.m. induite e dans le bobinage selon

$$e = \int_{\text{bobinage}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l},$$

or, le long du bobinage, $d\vec{l} = dl\vec{u}_\theta$ et Bv est constant à un instant donné, donc

$$e = \int_{\text{bobinage}} Bv\vec{u}_\theta \cdot dl\vec{u}_\theta = \int_{\text{bobinage}} Bv dl.$$

En notant l la longueur totale de bobinage,

$$e = Blv.$$

Le bobinage est modélisé électriquement par l'association série de la résistance du bobinage R et d'une bobine d'autoinduction L . La loi des mailles donne alors l'équation électrique (E) du système

$$\boxed{L \frac{di}{dt} + Ri = Blv + E},$$

où i est le courant parcourant la bobine et E la tension externe appliquée au bobinage.

7.4. Conversion électromécanique

En effectuant la combinaison (M) · v + (E) · i , on obtient

$$(m\ddot{x} + h\dot{x} + kx)v + \left(L \frac{di}{dt} + Ri \right) i = \underbrace{Blvi - Bliv}_{=0} + Fv + Ei,$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m \frac{dv^2}{dt} + \frac{1}{2}k \frac{dx^2}{dt} + hv^2 + \frac{1}{2}L \frac{di^2}{dt} + Ri^2 = Fv + Ei.$$

En définissant $E_{\text{méca}}$ l'énergie mécanique du système

$$E_{\text{méca}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

et $E_{\text{élec}}$ son énergie électrique

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2}Li^2,$$

on obtient

$$\boxed{\frac{dE_{\text{méca}}}{dt} + \frac{dE_{\text{élec}}}{dt} = Fv + Ei - \underbrace{Ri^2 - hv^2}_{\text{énergie dissipée}}}.$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie. L'énergie électrique $E_{\text{élec}}$ peut être convertie en énergie mécanique $E_{\text{méca}}$ et vice-versa. L'énergie totale du système peut varier à l'aide d'une source extérieure soit d'origine mécanique (terme Fv), soit d'origine électrique (terme Ei). L'énergie du système est dissipée sous forme mécanique (terme de frottement fluide $-hv^2$) et sous forme électrique (terme de perte résistives $-Ri^2$).

7. la notion de champ électromoteur et son lien avec la force électromotrice induite n'est pas au programme du HLPH412 et sera admise (non exigible à l'examen).

II. L'induction et l'énergie magnétique

7.5. Impédance motionnelle

On se place en régime sinusoïdal à la pulsation ω , avec les grandeurs électriques complexe \underline{i} et \underline{E} , et les grandeurs mécaniques \underline{x} et \underline{v} . En l'absence de force extérieure ($F = 0$), l'équation mécanique devient

$$(-m\omega^2 + hj\omega + k)\underline{x} = -Bl\underline{i},$$

d'où l'expression de \underline{x} en fonction de \underline{i}

$$\underline{x} = \frac{Bl}{m\omega^2 - hj\omega - k}\underline{i}.$$

L'équation électrique en régime sinusoïdal devient

$$(j\omega L + R)\underline{i} = \underline{E} + Bl\underline{v} = \underline{E} + Blj\omega\underline{x}.$$

En remplaçant \underline{x} par son expression en fonction de \underline{i} , on obtient

$$\begin{aligned}(j\omega L + R)\underline{i} &= \underline{E} + j\omega \frac{B^2 l^2}{m\omega^2 - hj\omega - k}\underline{i}, \\ \Leftrightarrow \underline{E} &= (j\omega L + R)\underline{i} + j\omega \frac{B^2 l^2}{hj\omega + k - m\omega^2}\underline{i}, \\ \Leftrightarrow \underline{E} &= \left(j\omega L + R + \frac{B^2 l^2}{h + j(m\omega - \frac{k}{\omega})} \right)\underline{i}.\end{aligned}$$

On note

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

la pulsation caractéristique du système masse-ressort du système. On obtient alors le comportement électrique équivalent du haut-parleur à force extérieure nulle de la forme

$$\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i},$$

où \underline{Z}_m est l'**impédance motionnelle** du haut-parleur, d'expression

$$\underline{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{m \left(\frac{h}{m} + j\omega \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \right)}.$$

Du point de vue électrocinétique, tout se passe comme si, en raison du couplage électromécanique, venait s'ajouter une impédance électrique supplémentaire (l'impédance motionnelle), caractérisant le couplage électromécanique.

Cette impédance présente une résonance pour la pulsation $\omega = \omega_0$. Il faudra choisir une structure mécanique telle que cette résonance soit en dehors de la bande passante utile du point de vue sonore. En pratique, la fréquence de résonance motionnelle est typiquement de quelques dizaines de hertz, alors que la gamme audible se situe entre 20 Hz et 20 kHz.

8. Les microphones

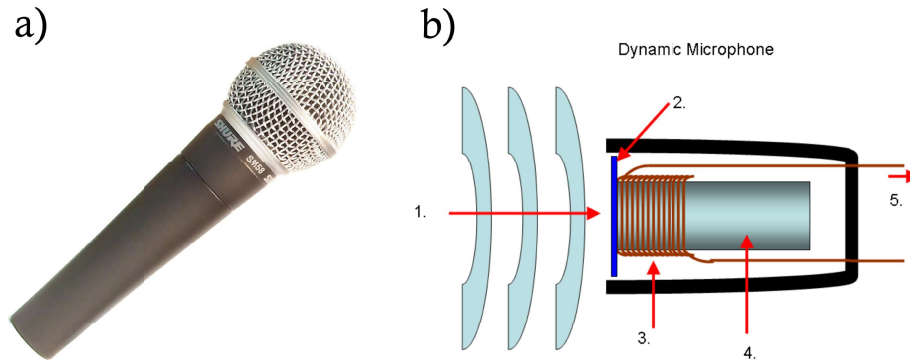


FIG. II.20. a) Le microphone dynamique à main Shure SM58. (Photo : Iain Fergusson, source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shure_SM58.jpg). b) Schéma de principe d'un microphone électrodynamique. 1. Onde sonore incidente. 2. Membrane mobile. 3. Bobine solidaire de la membrane mobile. 4. Aimant permanent. 5. Signal électrique induit par le mouvement de la bobine. (source : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:mic-dynamic.PNG>)

Un microphone est un système permettant de convertir un signal mécanique (sous forme d'onde acoustique) en signal électrique (sous forme d'un signal électrique informatif) : c'est un *capteur*. Un système physique permettant de transformer une forme d'énergie en une autre forme d'énergie est appelé un *transducteur*. Le haut-parleur (vu dans la section précédente) est un *transducteur électromécanique*, il permet de transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique (le mouvement de la membrane). C'est la vibration de la membrane ensuite qui va produire le son. Le microphone électrodynamique est basé sur le même principe que le haut-parleur, mais on l'utilise à l'envers : la vibration d'une membrane va entraîner le mouvement d'un bobinage dans un champ magnétique (Fig. II.20). Ce mouvement va donner lieu à la naissance d'une force électromotrice induite, image de la vibration acoustique initiale. Il s'agit d'un transducteur électromécanique utilisé en capteur.

D'autres technologies existent pour obtenir un signal électrique à partir d'un signal sonore. Les microphones électrostatiques sont basés sur l'effet capacitif. Un condensateur plan est formé par un plan métallique fixe, et un plan mobile (Fig. II.21). L'onde sonore provoque alors le mouvement du plan mobile qui se rapproche ou s'éloigne du plan fixe. La capacité du condensateur plan dépendant de la distance entre les deux plans, on obtient un composant dont la capacité varie au cours du temps, image du mouvement de la membrane mobile. Si le condensateur est initialement chargé, la variation de capacité va engendrer une variation de tension à ces bornes. C'est cette variation de tension qui permet d'obtenir le signal informatif sur l'onde sonore. Les microphones électrostatiques ont besoin d'une alimentation pour charger le condensateur mais aussi pour alimenter un amplificateur de tension, le signal obtenu étant de faible amplitude. La sensibilité des microphones électrostatiques est supérieure à celle des microphones électrodynamiques. Il existe également des microphones à électrets. Ils

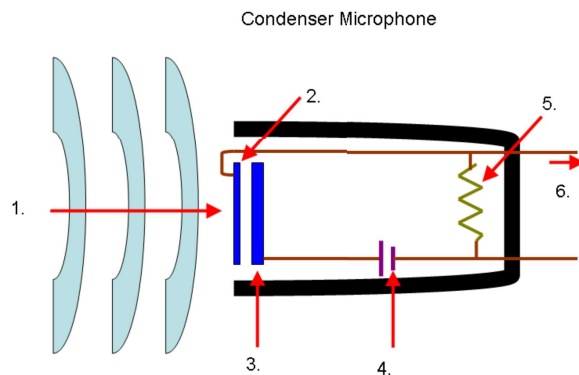


FIG. II.21. Principe de fonctionnement d'un microphone électrostatique. 1. Onde sonore incidente. 2. Membrane mobile. 3. Armature arrière. 4. Alimentation. 5. Résistance. 6. Signal électrique. Source : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:mic-condenser.PNG>

II. L'induction et l'énergie magnétique

utilisent la propriété remarquable de certains matériaux de conserver une charge électrostatique permanente (plus exactement un moment dipolaire permanent, on parle de matériaux *ferroélectriques*). Ce matériau se comporte alors comme l'armature d'un condensateur. Il est alors possible de les utiliser dans une géométrie identique à celle d'un microphone électrostatique : une membrane mobile modifie la capacité du condensateur formé, induisant un signal électrique en tension. Les microphones à électret n'ont pas besoin d'alimentation pour charger le condensateur mais nécessitent une alimentation pour l'amplification en tension, qui peut être fournie par une pile. La sensibilité des microphones à électret diminue au cours du temps, mais ils permettent de réaliser des capteurs de petite taille.

Sources :

— <https://fr.wikipedia.org/wiki/Microphone>

9. Echauffement par induction



FIG. II.22. Extrait d'une vidéo illustrant le principe du chauffage par induction. Une bobine est parcourue par un courant alternatif. Le champ magnétique variable généré induit des courants de Foucault dans la tige métallique, qui chauffe au rouge par effet Joule. https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=k4xsqw463Hs

Le chauffage par induction est une technique de chauffage dans la matière conductrice basée sur le phénomène d'induction électromagnétique. Un de ses principaux avantages réside dans la possibilité de chauffer de la matière dans son volume, sans contact avec la source d'énergie. L'objet à chauffer doit être métallique. Soumis à un champ magnétique variable, généré par une bobine alimentée par un courant sinusoïdal, des courants électriques sont induits dans le volume du matériau (*courants de Foucault*). Par effet Joule, ces courants génèrent localement de la chaleur, et par conséquent une élévation de la température du matériau. Cette méthode d'échauffement présente l'avantage d'élever la température de manière homogène dans le volume, alors qu'une méthode par contact avec une surface chaude nécessite la propagation de la chaleur par conduction thermique et donc du temps pour atteindre un profil de température homogène. Le chauffage par induction est utilisé par les techniques de trempe des matériaux, la soudure, la fusion des métaux mais également le thermoscellage des récipients ou le tirage des cristaux.

Son principal avantage est de procurer un chauffage homogène, mais il permet également de chauffer des parties inaccessibles par contact direct (par exemple du métal encastré dans du plastique). Cette technique permet également de développer des systèmes de chauffage plus compacts, en l'absence de surface chaude. Le rendement énergétique est très bon dans ces systèmes, avec une faible perte énergétique. En jouant avec la fréquence du courant électrique alimentant les bobines, il est possible de chauffer plus ou moins en profondeur dans le matériau (en jouant avec l'*effet de peau*). Plus la fréquence du champ magnétique est élevée, plus la profondeur de peau sera petite et plus une épaisseur fine de métal sera échauffée. Cette propriété permet de réaliser une trempe superficielle des pièces en acier, sans nécessité l'utilisation d'eau (la masse de la pièce servant de refroidisseur). On obtient alors un durcissement de la pièce en surface sans modifier les propriétés mécaniques en volume, situation intéressante dans certaines applications. En revanche, ce chauffage n'est pas sélectif, il peut chauffer d'autres pièces métalliques à proximité. Pour obtenir de fortes puissances, les systèmes sont coûteux. Enfin, les champs magnétiques utilisés peuvent introduire des perturbations électromagnétiques dans l'environnement proche, voir détruire certains composants électroniques sensibles.

Les fours à induction reposent sur ce principe de chauffage à induction pour la fusion des métaux à l'échelle industrielle. Les fonderies modernes utilisent ce type de fours, moins polluants et émettant moins de poussières. Ils sont adaptés à la production de fer, d'acier, de cuivre, d'aluminium et certains métaux précieux. Cependant, ces fours ne permettent pas le raffinage : il faut que les matériaux de charge soient de composition connue et contrôlée en amont. Les fréquences opérationnelles vont de 50 Hz à 400 kHz typiquement.

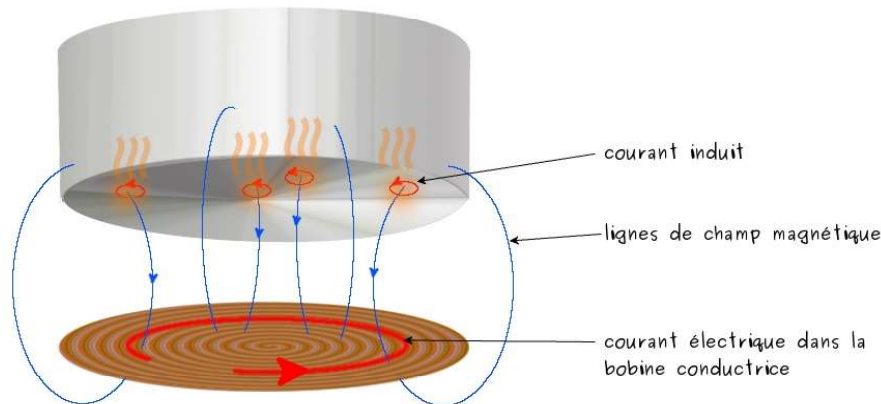


FIG. II.23. Principe d'une plaque de cuisson à induction. Un fil en forme de bobinage est parcouru par un courant alternatif. Ce bobinage génère un champ magnétique variable, induisant des courants de Foucault dans le métal du récipient. Si ce récipient est en matériau ferromagnétique, le travail magnétique d'orientation des domaines magnétiques (*pertes fer*) génère également de la chaleur. Source :

<https://couleur-science.eu/?d=23d1bf--comment-fonctionnent-les-plaques-a-induction>



FIG. II.24. Illustration du principe de fonctionnement d'une plaque à induction. Un morceau de chocolat sur une plaque allumée ne va pas fondre. Seulement les éléments métalliques seront chauffés comme un récipient (une poêle dans ce cas). Source :

<https://couleur-science.eu/?d=23d1bf--comment-fonctionnent-les-plaques-a-induction>

Une application domestique courante sont les plaques de cuisson à induction. Dans ce type de plaque, une bobine est placée sous une surface vitrocéramique, permettant de générer un champ magnétique variable, d'intensité importante proche de cette surface. Cette bobine est parcourue par un courant alternatif de l'ordre de 25 kHz typiquement, et donc génère un champ magnétique à la même fréquence. Des courants sont alors induits dans le métal du récipient posé sur la plaque, générant ensuite un échauffement par effet Joule. Pour plus d'efficacité, le fond du récipient est en matériau ferromagnétique. Le travail magnétique dissipe également de la chaleur permettant d'accentuer l'échauffement. Les récipients en fer, en fonte ou en acier inox ferromagnétique conviennent pour l'utilisation de telles plaques de cuisson. En revanche, les récipients en cuivre, aluminium, verre ou céramique ne fonctionnent pas, sauf s'ils sont pourvus d'un double fond constitué d'un matériau adapté. Il est également possible de placer sous le récipient un disque relais dans un matériau adapté. En 2017, le taux d'équipement des ménages français en plaques de cuisson à induction est de 61%.

II. L'induction et l'énergie magnétique

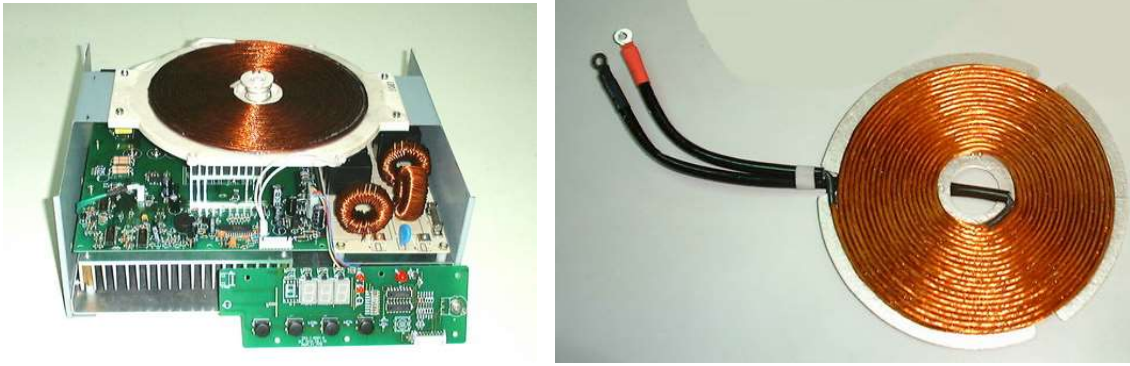


FIG. II.25. Plaque de cuisson à induction sans capot et sans plaque vitrocéramique. Il est possible de visualiser le bobinage inductif en cuivre (visible également sur la photo de droite). Source : https://en.sef.com.tw/index_down.php?CAhs=defuse&II=8&CA=4&sele=shop

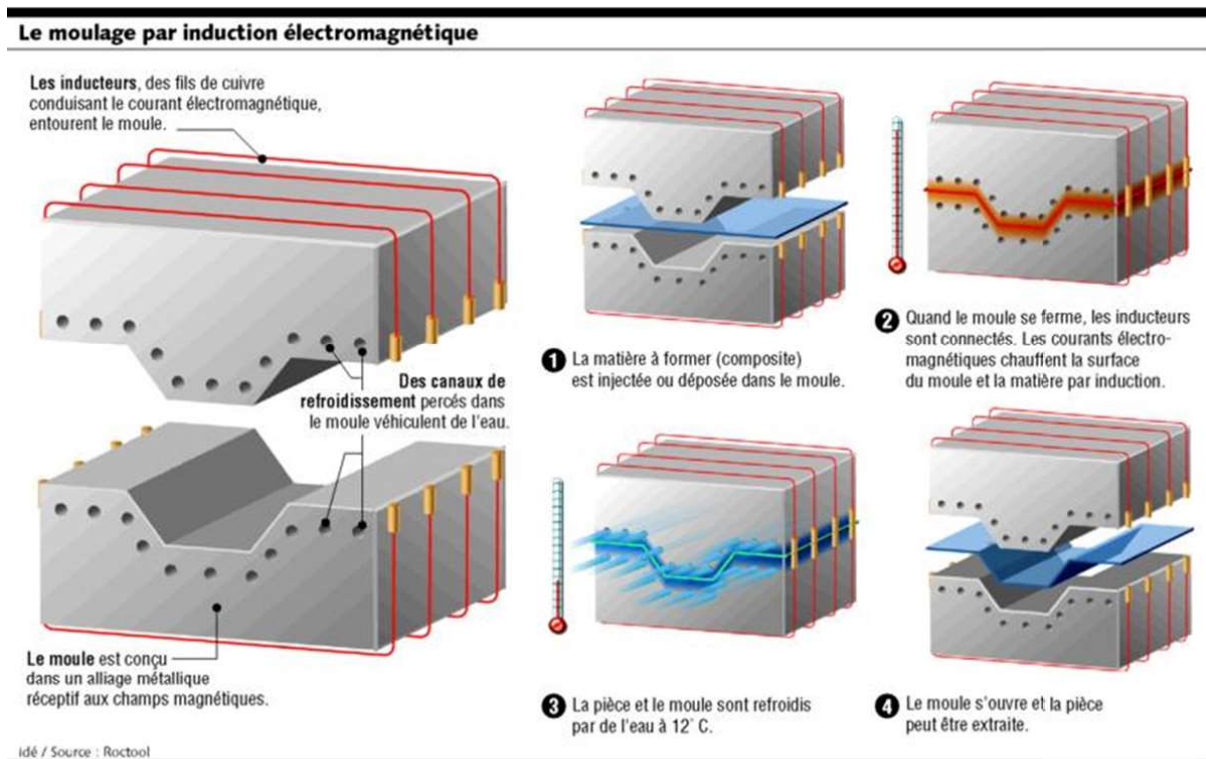


FIG. II.26. Extrait de l'article *Des pièces en composites à une vitesse record*, Les Echos (7 juin 2006). <https://www.lesechos.fr/2006/06/des-pieces-en-composites-a-une-vitesse-record-572601>

Les plaques à induction peuvent causer des perturbations électromagnétiques à l'environnement proche. Elles peuvent avoir un effet sur les objets magnétiques : cartes bancaires, bandes magnétiques,... Elles sont également déconseillées aux porteurs de stimulateurs cardiaques.

L'échauffement par induction peut également être utilisé pour le moulage des matériaux composites (Fig. II.26). Dans ce cas, le matériau n'est pas conducteur. Ce sont les moules qui sont en métal, et le principal intérêt de l'échauffement par induction est de pouvoir chauffer dans le volume du moule, sans diffusion thermique. Cela permet de monter en température rapidement (en quelques dizaines de secondes) et donc obtenir un gain notable sur la vitesse de moulage des pièces composites. Ce procédé a été imaginé par Roctool, l'une des rares start-up de la mécanique française, et mis en avant par le journal économique *Les Echos* (Fig. II.26).

Sources :

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Chauffage_par_induction
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Four_%C3%A0_induction
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Plaque_%C3%A0_induction
- <https://www.lesechos.fr/2006/06/des-pieces-en-composites-a-une-vitesse-record-572601>

10. Transfert d'énergie électrique sans contact



FIG. II.27. Station de recherche sans fil pour téléphone portable Nexus 4. Source : https://www.frandroid.com/dossiers/136322_dossier-la-technologie-sans-fil-qi

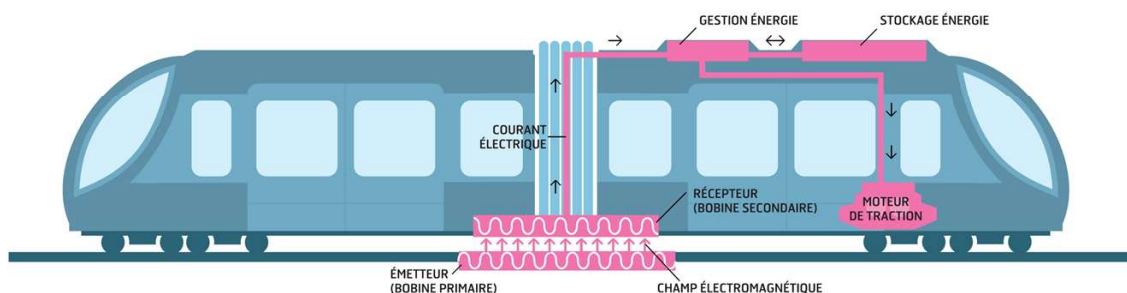
La transmission d'énergie électrique sans fil consiste à transmettre de l'énergie électrique sans avoir de contacts électriques. Elle repose sur le phénomène d'induction électromagnétique. Cette transmission existe depuis longtemps dans les transformateurs électriques, où un bobinage primaire est couplé inductivement à un bobinage secondaire par un noyau de fer. Si ces technologies sont très efficaces du point de vue énergétique, elles nécessitent un matériau ferromagnétique pour assurer un bon couplage. Actuellement, l'enjeu des transferts énergétiques sans fil consiste à réaliser ces derniers en l'absence de tout contact matériel entre le récepteur et l'émetteur. Les télécommunications ont permis le développement de techniques pour le transfert d'énergie à distance mais dans un objectif de transmission d'information et non

de rendement énergétique élevé. Le transfert d'énergie sans contact consiste en la génération d'un champ magnétique variable côté émetteur et un bobinage côté récepteur permettant d'induire une force électromotrice à partir de ce champ magnétique. Pour avoir un rendement énergétique important, contrairement aux télécommunications à base d'ondes électromagnétiques, le récepteur doit être dans la limite de champ proche de l'émetteur (c'est-à-dire à une distance inférieure à la longueur d'onde en ordre de grandeur) : on parle de *couplage inductif*. Cette distance va généralement de quelques centimètres à quelques mètres. Contrairement à la transmission de données, le rendement est le critère à maximiser pour la transmission d'énergie. Les rendements énergétiques de ces dispositifs sont typiquement de 50%. Cette technique est destinée à être utilisée pour alimenter des lieux difficiles d'accès ou les systèmes mobiles, en limitant l'usure de contacts électriques mobiles.

LA TRANSMISSION D'ÉNERGIE PAR INDUCTION POUR ALIMENTER UN TRAMWAY

1 Le courant qui traverse l'émetteur (bobine primaire) génère un champ magnétique qui produit alors du courant dans le récepteur (bobine secondaire). La transmission s'effectue automatiquement quand le récepteur se trouve au-dessus de l'émetteur.

2 Le système mis au point par Bombardier stocke l'énergie reçue par induction pour alimenter le moteur sur l'ensemble du parcours du tramway.



.....SOURCE : BOMBARDIER-PRIMOVE

FIG. II.28. Extrait de *L'électricité sans fil arrive dans les transports*, Les Echos (19 juin 2012), <https://www.lesechos.fr/2012/06/lelectricite-sans-fil-arrive-dans-les-transport-358748>.

II. L'induction et l'énergie magnétique

La technologie de transfert d'énergie sans fil s'est développée récemment dans les stations de recharge de téléphone portable (Fig. II.27). Cette technologie offre cependant de nombreuses perspectives dans les transports avec le développement des véhicules électriques. Dans le domaine du transport par rail (métros, tramways, trains), cette technologie n'avait pas été retenue jusqu'à présent à cause de son faible rendement. Mais les différents constructeurs (Bombardier, Alstom) travaillent à son développement. Dans l'article *L'électricité sans fil arrive dans les transports* (Les Echos, 19 juin 2012, <https://www.lesechos.fr/2012/06/lelectricite-sans-fil-arrive-dans-les-transport-358748>), il est indiqué que plusieurs brevets ont été déposés et des prototypes de tramways testés (Fig. II.28). Une autre application importante est celle de la voiture électrique. Grâce à la transmission d'énergie sans fil, il sera possible de recharger une voiture électrique en stationnement, voir même en roulant si la route est équipée d'émetteurs. Un consortium industriel, appelé *Wireless Power Consortium* (<https://www.wirelesspowerconsortium.com/>), rassemble plusieurs acteurs industriels intéressés par la technologie de transfert d'énergie sans fil. Parmi les différents projets soutenus par le consortium, un consiste à développer des plaques de recharge dans la chaussée, afin de pouvoir charger en continu le véhicule : il s'agit du projet Continuous Electric Drive (CES), expérimenté avec la C30 électrique de Volvo (Fig. II.29, <https://www.media.volvocars.com/global/en-gb/media/pressreleases/38135>).

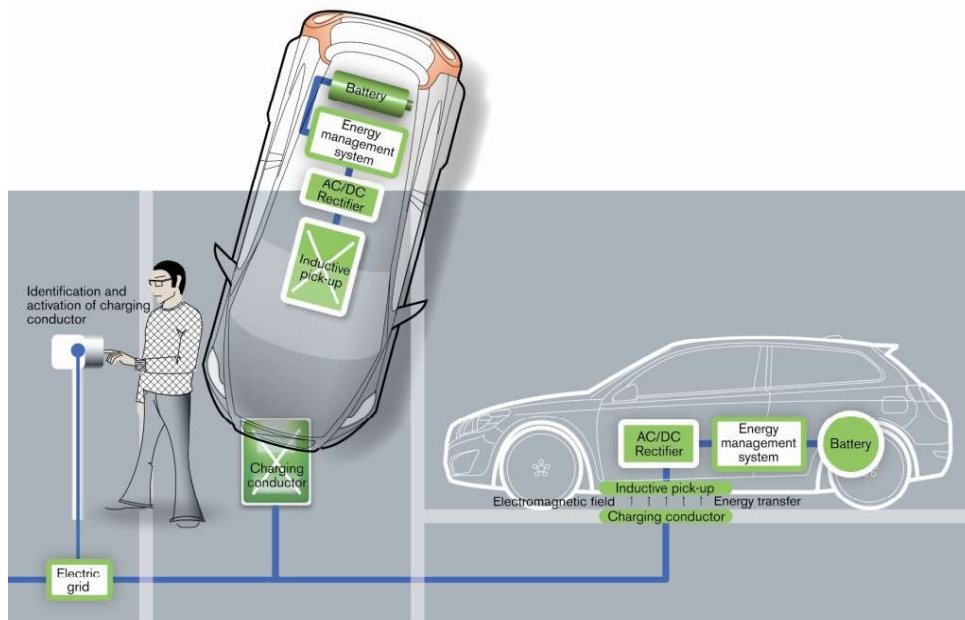


FIG. II.29. Projet *Continuous Electric Drive* de recharge de voiture électrique sans fil à partir de plaques de recharge dans la chaussée. Un prototype a été testé sur des voitures électriques Volvo C30. Source : https://www.frandroid.com/dossiers/136322_dossier-la-technologie-sans-fil-qi

Sources :

- <https://www.lesechos.fr/2012/06/lelectricite-sans-fil-arrive-dans-les-transport-358748>
- https://www.frandroid.com/dossiers/136322_dossier-la-technologie-sans-fil-qi
- <https://www.pourlascience.fr/sd/technologie/recharger-sans-fil-et-en-mouvement-9849.php>
- <https://www.bulletin.ch/fr/news-detail/la-recharge-sans-fil-est-elle-efficace.html>
- <https://www.wirelesspowerconsortium.com/>
- <https://www.media.volvocars.com/global/en-gb/media/pressreleases/38135>

11. Moteurs

11.1. Machines électriques

Une machine électrique est un dispositif de conversion de puissance électromécanique. On distingue les génératrices électriques des moteurs électriques. Une génératrice est un système qui, à partir d'une source d'énergie mécanique (en général un mouvement de rotation), produit de l'énergie électrique, continue ou alternative. C'est l'élément de base des centrales de production d'électricité. Les moteurs électriques sont des dispositifs qui, à partir d'une source d'énergie électrique, fournissent un mouvement de rotation et de l'énergie mécanique.

Ces dispositifs sont des convertisseurs électromécaniques, ils exploitent le couplage entre les phénomènes électriques et les phénomènes mécaniques. Ce couplage est en pratique médiatisé par un champ magnétique. Le mouvement mécanique est provoqué par la force de Laplace, qu'exerce un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant électrique : c'est le principe de base de fonctionnement du moteur électrique. Inversement, un bobinage de fil en rotation dans un champ magnétique statique sera le siège du phénomène d'induction, de la génération d'une force électromotrice induite, et par conséquent de la génération d'un courant électrique : c'est le principe de base de fonctionnement d'une génératrice électrique.

L'étude de ces systèmes se fait donc sous ces deux approches. La description électrocinétique du circuit, incluant la force électromotrice, permet de dériver une équation dite *électrique* (application des lois de Kirchhoff). Le couplage au mouvement mécanique apparaît alors *via* l'expression de la force électromotrice d'induction. La description mécanique du système, incluant les forces de Laplace, permet de dériver une équation dite *mécanique* (application du théorème du moment cinétique). Le couplage à la dynamique électrique apparaît alors *via* l'expression de la force de Laplace.

Par nature, les machines électriques sont réversibles : ce sont des objets très similaires, mais ils sont optimisés pour une utilisation données. Par exemple, si l'on force un moteur à tourner par l'application d'un couple mécanique extérieur, ce dernier pourra générer de l'énergie électrique. Les machines électriques tournantes (génératrices et moteurs) possèdent deux éléments distincts du point de vue mécanique :

- le *rotor* : partie du système qui tourne, qui est mobile mécaniquement ;
- le *stator* : partie du système qui reste statique, qui est immobile mécaniquement.

On distingue également deux types d'éléments du point de vue électrique cette fois :

- l'*inducteur* : partie qui est la source du champ magnétique ;
- l'*induit* : partie qui est le siège du phénomène d'induction.

Dans le cas d'un moteur, le stator est solidaire de la carcasse du moteur. Il permet de générer un champ magnétique tournant, il s'agit donc également de l'inducteur. Le rotor est l'arbre moteur, mis en rotation par la force de Laplace. C'est l'induction due au champ variable qui permet d'induire une force électromotrice et par conséquent un courant en circuit fermé dans le rotor. Ainsi, le rotor est également l'induit d'un moteur électrique.

Dans le cas d'une génératrice électrique, le rotor est mis en mouvement et permet de faire tourner un champ magnétique (aimant permanent ou bobinage alimenté en courant). Ce champ magnétique tournant va provoquer une variation de flux magnétique dans les bobinages du stator solidaire de la carcasse, et produire l'énergie électrique. Ainsi, dans le cas d'une génératrice électrique, le rotor est l'inducteur alors que le stator est l'induit. Dans le cas des machines électriques tournantes (génératrices ou moteurs), un paramètre important est le flux maximal de champ magnétique dans l'induit, noté ϕ_0 . La puissance de la machine électrique dépend directement de ce flux maximal ϕ_0 : plus ce flux est important, plus la machine sera puissante. Or, ce flux maximal dépend de l'amplitude du champ généré par l'inducteur et de la surface de l'induit. Donc une machine puissance aura un induit de grande taille. Ainsi, plus la machine sera puissante, plus elle sera volumineuse. Le rotor d'une centrale électrique fait plusieurs mètres de long, pour un diamètre de l'ordre du mètre (Fig. II.9) alors qu'une dynamo de vélo ne fera que quelques centimètres (Fig. II.6).

Il existe un troisième type de machine électrique : les *transformateurs électriques*. Ces derniers permettent de faire une conversion de puissance électrique-électrique. Ils ne fonctionnent qu'avec des tensions alternatives. Ils sont constitués de deux bobinages : un primaire et un secondaire. Ces deux bobinages entourent un élément dit *ferromagnétique* commun. Cela permet de canaliser le champ magnétique de sorte que l'intégralité du flux de champ magnétique émis par un bobinage soit "capter" par l'autre bobinage. Les transformateurs sont d'une

II. L'induction et l'énergie magnétique

grande utilité dans les réseaux électriques car ils permettent d'élever ou d'abaisser une tension. Ainsi, il est possible de transporter l'énergie électrique sur des lignes haute tension (pour limiter les pertes par dissipation Joule), et d'abaisser ces tensions à des valeurs utiles pour l'utilisation finale (220 V efficace dans une installation domestique). Ils sont également utilisés dans tous les appareillages de charge comme les chargeurs de téléphone ou d'ordinateur : ils permettent de passer d'une tension de 220 V efficace à 12 V ou 6 V typiquement.

11.2. Moteurs électriques

Il existe différents types de moteurs électriques. Dans cette section, on présentera succinctement les principes de fonctionnement des quatre principaux types de moteurs : le moteur pas à pas, le moteur à courant continu, le moteur asynchrone et le moteur synchrone.

Moteur pas à pas

Le moteur pas à pas a été inventé initialement pour l'industrie horlogères par Marius Lavet, ingénieur français des Arts et Métiers, en 1936. Dans sa version la plus simple, le rotor est constitué d'un aimant permanent. Le stator est constitué d'un ensemble de N paires de bobines permettant de générer un champ magnétique homogène d'amplitude constante, mais dans N directions angulaires, équiréparties tous les $\frac{2\pi}{N}$. Lorsque le champ magnétique du stator est dans une direction donnée, le rotor va s'orienter de manière à aligner la direction de son aimantation avec le champ magnétique. Après quelques oscillations, la dissipation permet au rotor d'atteindre l'équilibre dans une direction totalement déterminée par la direction du champ magnétique et donc la géométrie du stator. Une fois aligné, il est possible de tourner en éteignant la paire de bobine initiale, puis en allumant la paire de bobine adjacente. C'est pour cela qu'on parle de moteur "pas à pas" : le rotor tourne en se déplaçant par pas angulaires successifs de $\pm \frac{2\pi}{N}$.

Le grand intérêt de ces moteurs est la précision du positionnement. Ils sont d'utilisation très courante dans les systèmes nécessitant un contrôle en vitesse ou en position en boucle ouverte, en pratique les systèmes de positionnement (dans les imprimantes, les imprimantes 3D, les scanners, les photocopieurs, en robotique, sur les machines outils industrielles,...). En revanche, ils sont limités en puissance et surtout en vitesse de rotation. Ils ne permettent pas d'atteindre des vitesses importantes (en pratique inférieures à 3000 tours/min).

Moteur à courant continu

Dans un moteur à courant continu, le stator génère un champ magnétique homogène dans une direction, à l'aide d'une paire de bobines dans sa version la plus simple. L'axe de rotation du rotor est perpendiculaire à ce champ magnétique statique. Le rotor est constitué de spires rectangulaires, de longueur selon l'axe de rotation et de largeur perpendiculaire à l'axe de rotation. Chaque spire est parcourue par un courant i issu d'une source extérieure. Pour une position donnée, la spire subit un moment mécanique $\vec{\mathcal{M}}(\theta, i, B)$ qui dépend de la position angulaire du rotor, le courant dans le rotor et le champ magnétique généré par le stator. C'est la force de Laplace qui produit ce moment mécanique, et donc le mouvement de rotation. Le couple est donc proportionnel au courant i et en particulier $\vec{\mathcal{M}}(\theta, -i, B) = -\vec{\mathcal{M}}(\theta, i, B)$. Cependant, le courant circule en sens opposé dans les deux branches en longueur de la spire. Ainsi, après une rotation de π , la force de Laplace sur le rotor est de signe opposé (car proportionnelle au courant qui a changé d'orientation). Par conséquent, $\vec{\mathcal{M}}(\theta + \pi, i, B) = -\vec{\mathcal{M}}(\theta, i, B)$, et le moment mécanique est nul en valeur moyenne pour un mouvement de rotation : le moteur ne peut fonctionner tel quel. Afin d'assurer un moment mécanique de signe constant, il faut périodiquement (à chaque rotation de π) changer le signe du courant circulant dans le rotor. C'est le rôle du *collecteur*. Cependant, les collecteurs en pratique reposent sur des balais solidaires du stator, munis de charbons permettant le contact électrique avec le rotor, mais soumis aux frottements lors de la rotation de ce dernier. C'est le principal inconvénient des moteurs à courant continu, il fait intervenir un système de collecteur avec des balais qui s'usent avec le temps.

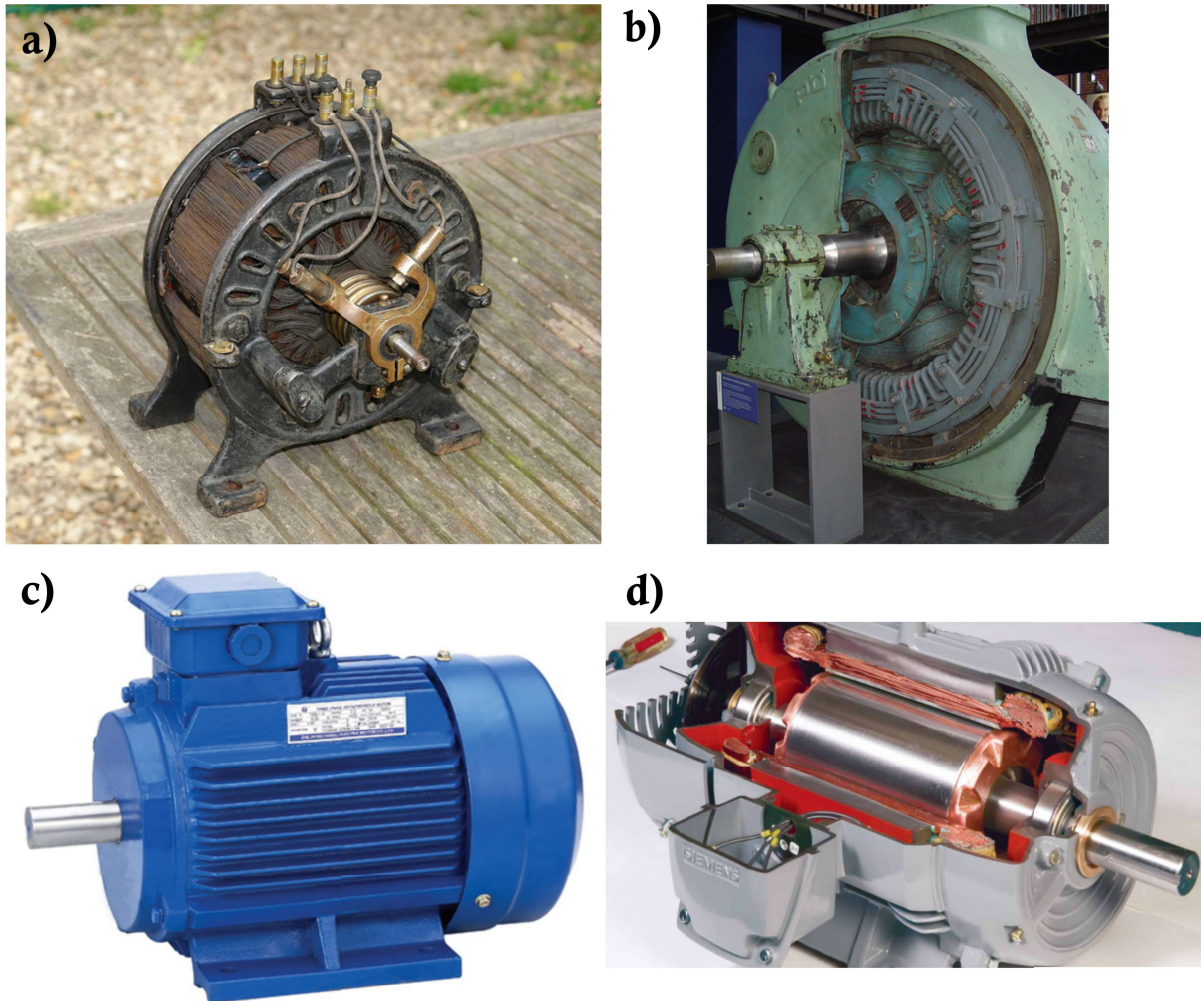


FIG. II.30. Exemples de moteurs asynchrones. a) Moteur asynchrone de 1910. b) Moteur asynchrone industriel de 1920. c) Moteur asynchrone moderne. d) Moteur asynchrone; vue en coupe. Sources :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_électrique
<http://www.ramsainc.com/electricmotors/>
<https://wonderfulengineering.com/download-electrical-motor-images-free-here/>

Moteurs synchrones et asynchrones

Dans les moteurs synchrones et asynchrones, le stator génère un champ magnétique tournant, c'est-à-dire un champ de norme constante mais de direction tournant à une pulsation ω . Dans un moteur synchrone, le rotor est constitué d'un aimant permanent (ou un bobinage alimenté en courant par une alimentation extérieure). Un moment magnétique (aimant) dans un champ magnétique est soumis à un moment mécanique qui tend à aligner la direction du moment magnétique avec celle du champ magnétique. En quelque sorte, l'aimant cherche à s'aligner avec le champ magnétique. Si ce dernier tourne, alors le moment mécanique va entrainer en rotation le moment magnétique, qui cherche perpétuellement à s'aligner avec le champ magnétique. En régime établi, le moment magnétique tourne à la même fréquence que le champ magnétique : c'est pour cela que l'on parle de moteur *synchrone*, il y a synchronisme entre le rotor et le champ tournant. L'angle entre le champ magnétique et le moment magnétique dépend de la puissance demandée au moteur. Si la puissance demandée est trop importante, le rotor "décroche" et le moteur ne fonctionne plus. Un des intérêts du moteur synchrone est que sa vitesse de rotation est parfaitement déterminée par la fréquence de rotation du champ tournant, indépendamment de la puissance demandée. Ils trouvent alors de nombreuses applications industrielles nécessitant une vitesse

II. L'induction et l'énergie magnétique

de rotation stable sans influence de la puissance demandée (laminoires,...). Un de ces principaux inconvénients est qu'il faut un moteur annexe pour amener le rotor à la fréquence de synchronisme, le rotor "n'accroche pas" spontanément. Les moteurs de TGV sont des moteurs auto-synchrones, c'est-à-dire que ce sont des moteurs synchrones dont la vitesse de rotation du champ magnétique est contrôlable : cela permet d'avoir un contrôle parfait de la vitesse de rotation des roues et donc de la vitesse de la rame.

Dans un moteur asynchrone, le rotor est constitué d'un bobinage de fil conducteur. Soumis au champ magnétique tournant, une variation de flux magnétique va engendrer une force électromotrice induite. Le bobinage rotorique est en circuit fermé sur une résistance dite de *shunt*, permettant à un courant de circuler. Cette résistance est plutôt élevée au démarrage du moteur pour éviter les appels de courant importants, mais est réduite à un court-circuit une fois le régime stationnaire établi (vitesse de rotation du rotor constante) afin de limiter les pertes et optimiser le rendement. À nouveau, les forces de Laplace vont engendrer le mouvement de rotation du rotor. Mais pour qu'il y ait des forces de Laplace, il faut qu'il existe un courant dans le rotor et donc qu'une force électromotrice soit induite. Donc le rotor ne peut pas tourner à la fréquence de rotation du champ tournant. Pour que le mouvement soit entretenu, il faut nécessairement que la fréquence de rotation du rotor soit différente de celle du champ magnétique tournant (en pratique elle doit être inférieure) : c'est pour cela que l'on parle de moteur *asynchrone*, il y a asynchronisme entre le rotor et le champ tournant. La différence entre la fréquence de rotation du champ tournant et celle du rotor est appelé le *glissement*. Plus la puissance demandée est importante, plus le glissement sera élevé, c'est-à-dire que la fréquence de rotation du rotor diminuera si la puissance demandée augmente. Les moteurs sont très utilisés dans les applications ne nécessitant pas une vitesse de rotation stable : pompes, chariots élévateurs, ascenseurs, machines outils,...

Sources :

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur_pas_%C3%A0_pas
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_%C3%A0_courant_continu
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_synchrone
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_asynchrone

11.3. Bogie de TGV

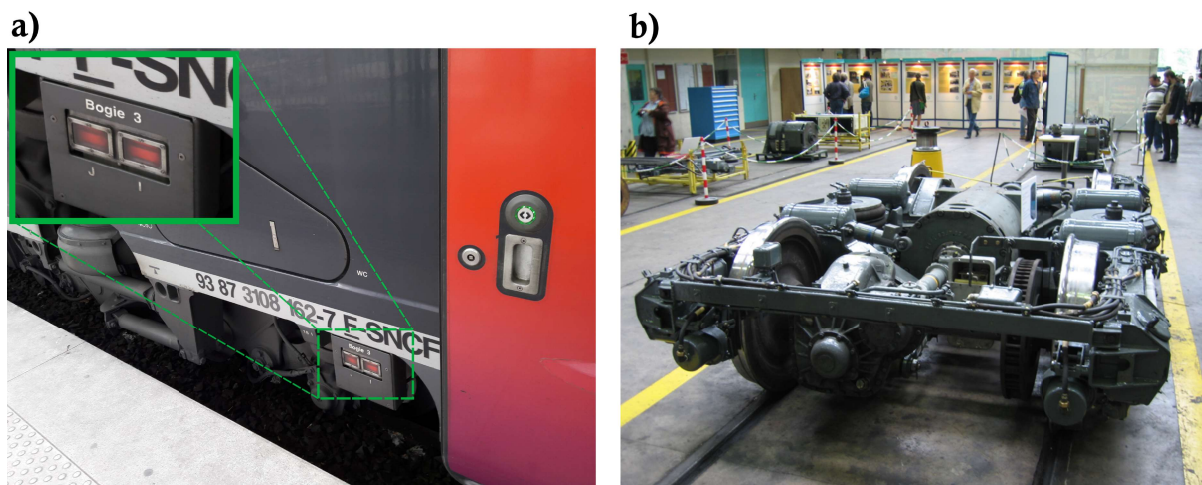


FIG. II.31. a) Bogie d'une rame de TGV duplex (photo : K. Maussang). b) Bogie de MF 67. JPO Atelier de Bobigny 24/05/2008. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/MF_67

Les bogies sont des châssis portant l'extrémité d'un train, mobiles par rapport au châssis du véhicule. Leur rôle est multiple et fondamental : supporter la charge, permettre la traction et le freinage, assurer le confort, capter les signaux de voie... Ils permettent également de faciliter l'insertion d'un train dans une courbe. Le mot bogie est un mot d'origine anglaise qui signifie cabriolet, c'est-à-dire un attelage hippomobile se guidant facilement. On distingue les bogies porteurs, généralement dédiés au freinage et assurant la répartition des charges et

II. L'induction et l'énergie magnétique

le guidage, des bogies moteurs. Les moteurs électriques d'un train sont situés dans ces bogies moteurs. Chaque wagon ou locomotive possède ses propres bogies, en général deux. Dans le cas des TGV, les bogies sont situés à cheval entre deux voitures, ce qui a constitué une rupture technologique importante lors du développement des rames à grande vitesse dans les années 1970.

Sources :

— <https://fr.wikipedia.org/wiki/Bogie>

— <https://www.alstom.com/fr/nos-solutions/composants/bogies-securite-fiabilite-et-confort>

II. L'induction et l'énergie magnétique

Chapitre III

Ondes électromagnétiques dans le vide

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment une variation temporelle du champ magnétique résulte en l'apparition d'un champ électrique dit électromoteur dans le phénomène d'induction, résultant en une force électromotrice. Ce résultat est une conséquence directe de la loi de Maxwell-Faraday. Dans ce chapitre, nous allons étudier le couplage dynamique entre champs électrique et magnétique conséquent des équations de Maxwell, et notamment les solutions ondulatoires. Ces ondes dites *électromagnétiques* seront alors étudiées en détails dans le cas de la propagation dans le vide.

1. Des équations de Maxwell à l'équation de D'Alembert

On a l'équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Dans le vide,

$$\vec{j} = \vec{0} \text{ et } \rho = 0.$$

Et compte-tenu de la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

À partir de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Or, on a la relation suivante pour tout champ vectoriel \vec{a}

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = -\Delta \vec{a} + \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{a}).$$

De plus, d'après l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

et dans le vide $\rho = 0$ donc

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\Delta \vec{E} + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E})}_{=\vec{0}}.$$

On obtient alors l'équation de D'Alembert

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}.$$

Il s'agit d'une équation d'onde.

Remarque 1 : Ici il s'agit d'un opérateur Laplacien vectoriel. En cartésiennes, chaque composante vérifie l'équation de D'Alembert :

$$\Delta E_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0.$$

III. Ondes électromagnétiques dans le vide

Attention, dans les autres systèmes de coordonnées, ce n'est pas vrai, il faut expliciter l'expression du Laplacien vectoriel.

Remarque 2 : À partir d'une équation couplant champ magnétique et champ électrique, on a éliminé le champ magnétique. On peut faire l'inverse pour obtenir une équation sur le champ électrique.

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Or,

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\Delta \vec{B}.$$

D'où l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Champs électrique et magnétique vérifient la même équation d'onde. Ils sont couplés par les équations de Maxwell. On parle d'**ondes électromagnétiques**.

2. L'Onde Plane Progressive Monochromatique

2.1. Définition

On a l'équation d'onde

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On cherche un ensemble de solutions à cette équation d'onde sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde, ω est la pulsation de l'onde, \vec{E}_0 est l'amplitude (vectorielle) complexe de l'onde.

Relation de dispersion

Quelle relation entre \vec{k} et ω doit-on satisfaire pour que l'équation d'onde soit vérifiée ?

On a

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E},$$

et

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}.$$

En injectant dans l'équation d'onde, on obtient

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2.$$

Pour $k > 0$ et $\omega > 0$,

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

avec λ la longueur d'onde. C'est la **relation de dispersion** des ondes électromagnétiques dans le vide.

Dépendance temporelle : l'onde oscille à une seule pulsation ω , il s'agit d'une **onde monochromatique**.

Dépendance spatiale : on considère un vecteur d'onde selon une direction notée \vec{u}_z

$$\vec{k} = k\vec{u}_z \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r} = kz.$$

À un instant donné, l'amplitude de l'onde est constante dans tout plan à $z=Cte$: il s'agit d'une **onde plane**.

2.2. Aspect ondulatoire, propagation

En notation réelle

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz).$$

On introduit la célérité de l'onde $c = \frac{\omega}{k}$. On a alors

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}(z - ct, 0) = \vec{E}\left(0, t - \frac{z}{c}\right).$$

L'onde se propage à la vitesse c .

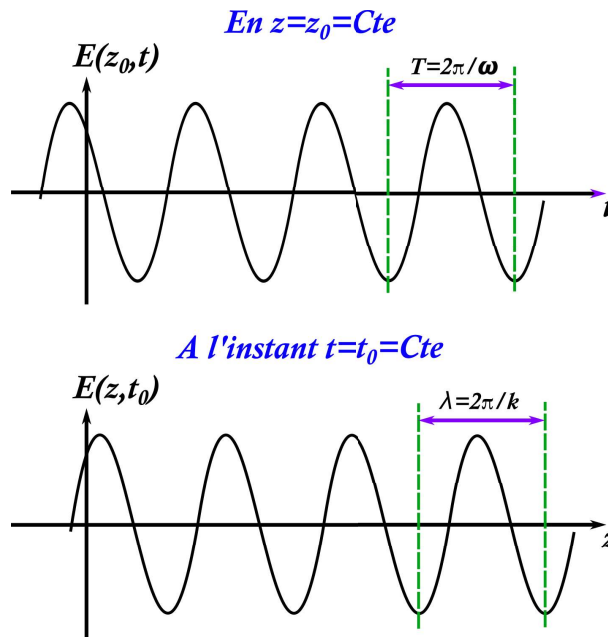


FIG. III.1. Périodicité temporelle et spatiale d'une onde.

2.3. Généralisation

On considère une onde en notation complexe

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

On définit la phase

$$\Phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}.$$

Les plans équiphasés (ou plans d'onde) sont définis par la relation $\Phi = Cte$. À un instant t donné, $\vec{k} \cdot \vec{r} = Cte$ sur une surface d'onde. Soient M et M' deux points de l'espace appartenant à la même surface d'onde

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = \vec{k} \cdot \vec{OM}' = \vec{k} \cdot (\vec{OM} + \vec{MM}'),$$

donc, pour Σ une surface d'onde,

$$\boxed{\forall (M, M') \in \Sigma, \vec{k} \cdot \vec{MM}' = 0}.$$

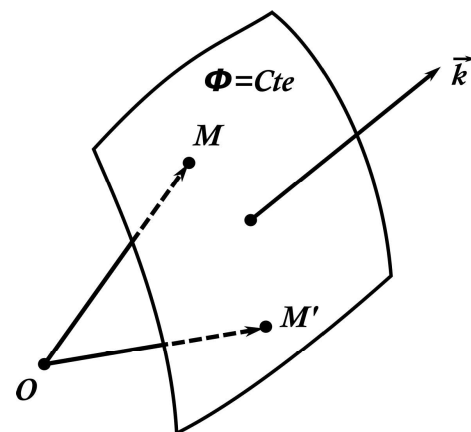


FIG. III.2. Notion de surface d'onde.

Le vecteur d'onde est localement perpendiculaire aux surfaces d'onde ($\Phi = Cte$).

III. Ondes électromagnétiques dans le vide

Remarque : on a adopté ici la notation complexe pour décrire le champ électrique

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right).$$

Cette notation complexe va permettre de "simplifier" les équations de Maxwell.

3. Structure de l'onde plane

3.1. Équations de Maxwell

Expression des opérateurs vectoriels en complexe

On considère un champ complexe vectoriel $\vec{a}(\vec{r}, t)$ et un champ complexe scalaire $U(\vec{r}, t)$ d'expressions

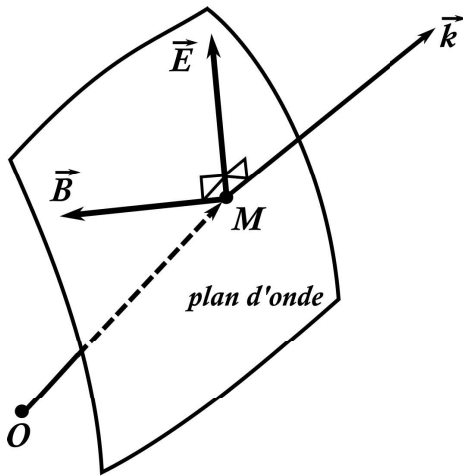
$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \vec{a}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad U(\vec{r}, t) = U_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

On a alors

$$\text{div } \vec{a} = -j\vec{k} \cdot \vec{a} \quad ; \quad \text{rot } \vec{a} = -j\vec{k} \wedge \vec{a} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = j\omega \vec{a}.$$

$$\text{grad } U = -j\vec{k} U \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial t} = j\omega U.$$

Equations de Maxwell dans le vide en complexe



On considère un champ électromagnétique monochromatique, progressif, de vecteur d'onde local \vec{k} . Au voisinage d'un point d'une surface d'onde, on peut considérer localement une structure d'Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM).

En complexe, les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{k} \wedge \vec{E} &= \omega \vec{B}, \\ \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{k} \wedge \vec{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}. \end{aligned}$$

Conséquences immédiates : \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} forment un trièdre direct ; \vec{B} et \vec{E} sont orthogonaux à \vec{k} .

FIG. III.3. Structure locale d'onde plane.

$$\vec{E} \perp \vec{k} \quad ; \quad \vec{B} \perp \vec{k} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad ; \quad \|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}.$$

3.2. Structure spatio-temporelle de l'onde

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) est constituée d'un couple de champs électrique et magnétique (\vec{E}, \vec{B}) (voir Fig. III.4). Ces deux champs sont orthogonaux entre eux à tout instant en tout point de l'espace. Ils sont également perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} définissant la direction de propagation de l'onde. Champs électrique et magnétique possèdent la même période spatiale λ , la longueur d'onde. Champs électrique et magnétique oscillent temporellement à la même pulsation ω .

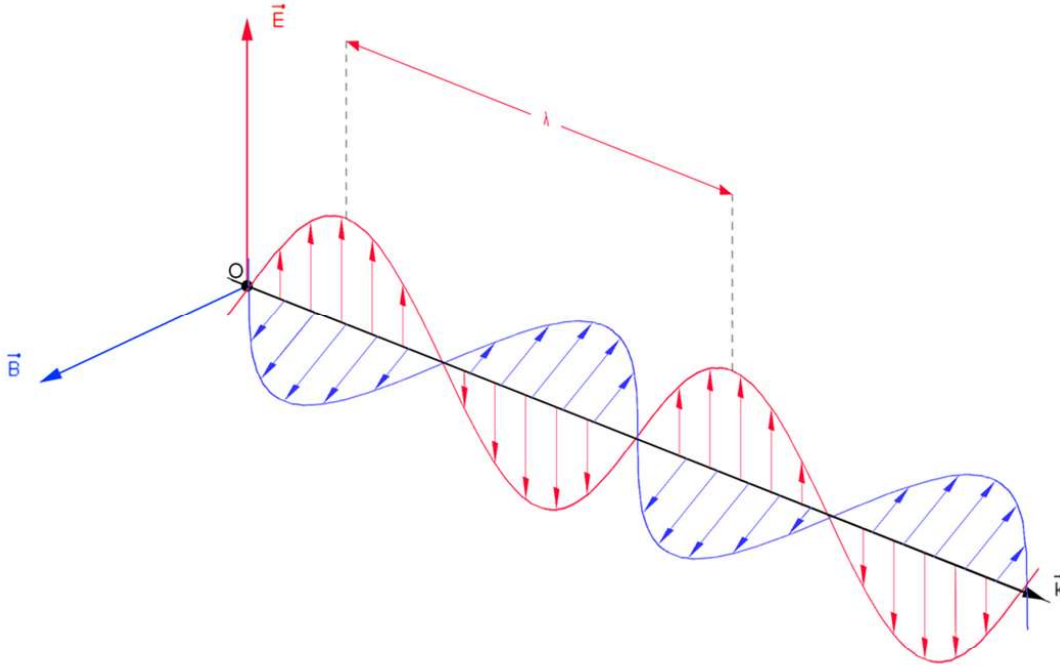


FIG. III.4. Structure du champ électromagnétique d'une onde plane progressive monochromatique. La longueur d'onde λ correspond à la périodicité spatiale commune des deux champs. Source : [https://fr.wikiversity.org/wiki/Notions_de_base_d'optique_ondulatoire/La_lumière, _une_onda_électromagnétique](https://fr.wikiversity.org/wiki/Notions_de_base_d'optique_ondulatoire/La_lumi%C3%A8re,_une_onda_%C3%A9lectromagn%C3%A9tique)

4. Polarisation des ondes

4.1. Définition

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique s'écrit de manière la plus générale sous la forme suivante pour le champ électrique

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right),$$

avec $\vec{E}_0 \in \mathbb{C}^2$, ω la pulsation et \vec{k} le vecteur d'onde. Si la dépendance spatio-temporelle de l'onde est intégralement contenue dans le terme en $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, son aspect vectoriel est lui contenu dans l'amplitude complexe vectorielle de l'onde \vec{E}_0 . Cette amplitude complexe vectorielle contient deux informations : la norme de \vec{E}_0 et la direction du champ \vec{E}_0 . L'intensité d'une onde électromagnétique est proportionnelle à $\|\vec{E}_0\|^2$. La direction du champ électrique est caractérisé alors par un vecteur unitaire complexe \vec{u} , perpendiculaire au vecteur d'onde. La dynamique du vecteur \vec{u} caractérise l'état de polarisation de l'onde. On suppose que l'onde se propage vers les z positifs, c'est-à-dire que $\vec{k} = k\vec{u}_z$, et ainsi

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \text{Re} \left(\vec{u} e^{i(\omega t - kz)} \right),$$

avec $E_0 = \|\vec{E}_0\| \in \mathbb{R}^+$ et

$$\vec{u} = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1$ (car le vecteur \vec{u} est unitaire). Suivant les valeurs de α et β , on aura différentes dynamiques du vecteur \vec{u} , c'est-à-dire différents états de polarisation.

III. Ondes électromagnétiques dans le vide

4.2. Polarisation rectiligne

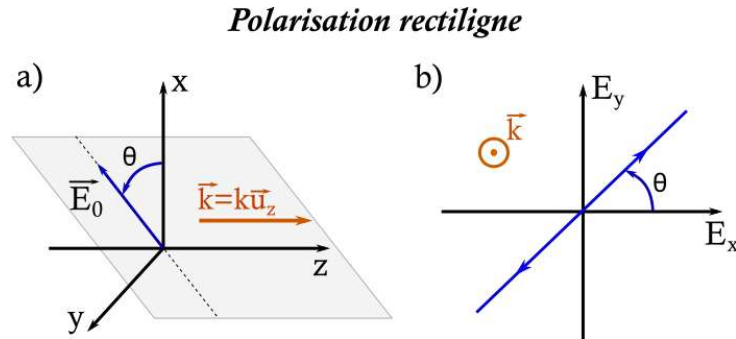


FIG. III.5. Structure d'une onde polarisée rectilignement. a) Orientation du champ électrique dans l'espace. b) Représentation de la polarisation rectiligne dans le plan $(E_y(\vec{r},t), E_x(\vec{r},t))$: il s'agit d'une droite, d'où le nom de *polarisation rectiligne*.

Formellement, une polarisation rectiligne est une onde électromagnétique dont le vecteur \vec{E} possède une direction constante en notation réelle, c'est-à-dire que les deux composantes $E_x(z,t)$ et $E_y(z,t)$ sont en phase. Ainsi, on a $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$, tels que $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_0 \cos \theta \cos(\omega t - kz), \\ E_y(z,t) &= E_0 \sin \theta \cos(\omega t - kz). \end{aligned}$$

Dans le plan (E_x, E_y) , le champ électrique décrit la trajectoire d'une droite faisant un angle θ avec l'axe des abscisses : c'est pour cela que l'on parle de polarisation rectiligne.

Illustration : <https://www.geogebra.org/m/1AYD1Kob>.

4.3. Polarisation circulaire droite - circulaire gauche

Il est également possible d'avoir un vecteur \vec{u} qui tourne régulièrement, avec un champ électrique constant en norme dans le temps. On parle de polarisation circulaire. Dans ce cas, les deux composantes $E_x(z,t)$ et $E_y(z,t)$ sont en quadrature (déphasées de $\pi/2$) et le champ électrique tourne avec une trajectoire de cercle dans le plan (E_x, E_y) :

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_0 \cos(\omega t - kz), \\ E_y(z,t) &= \pm E_0 \sin(\omega t - kz), \end{aligned}$$

de vecteur \vec{u} complexe correspondant

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

avec $i^2 = -1$. Suivant le sens de rotation, on qualifie l'onde de circulaire gauche ou circulaire droite.

Circulaire gauche

$$\vec{E}_0^g = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix}.$$

Circulaire droite

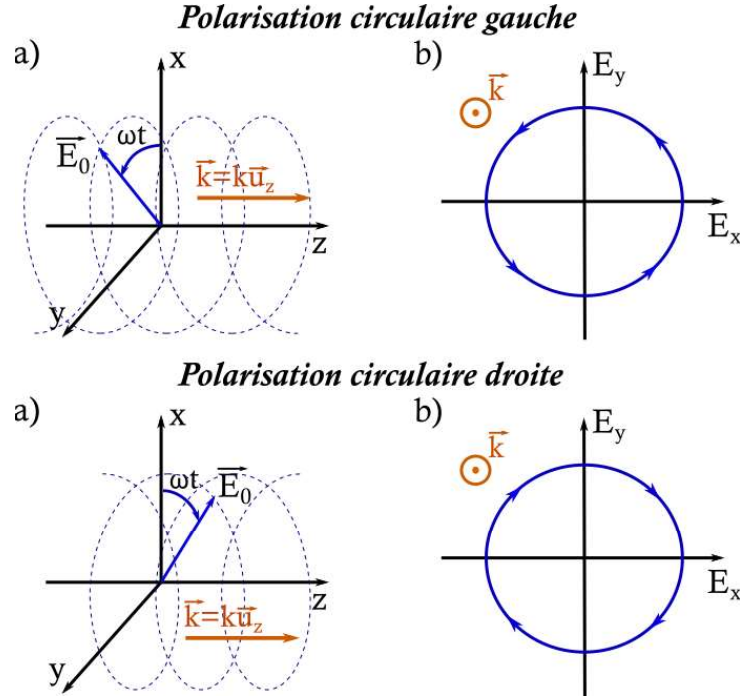


FIG. III.6. Structure d'une onde polarisée circulaire gauche et circulaire droite. a) Orientation du champ électrique dans l'espace. b) Représentation de la polarisation circulaire dans le plan $(E_y(\vec{r}, t), E_x(\vec{r}, t))$: il s'agit d'un cercle, d'où le nom de *polarisation circulaire*. Si le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ tourne dans le sens horaire, alors on parle de *circulaire droite*. Si ce dernier tourne dans le sens anti-horaire, alors on parle de *circulaire gauche*.

$$\vec{E}_0^d = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ -E_0 \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix}.$$

Pour qualifier la polarisation circulaire de *droite* ou de *gauche*, il faut se représenter l'onde en la visualisant se propageant vers l'observateur. Si le champ électrique tourne dans le sens horaire, alors on parle de circulaire droite. Si ce dernier tourne dans le sens anti-horaire, alors on parle de circulaire gauche.

Illustration : <https://www.geogebra.org/m/hfQUjqXm>.

4.4. Polarisation elliptique

Il est possible également d'avoir un déphasage quelconque entre les composantes oscillantes $E_x(z, t)$ et $E_y(z, t)$, se traduisant par une trajectoire elliptique dans le plan (E_x, E_y) . Suivant le sens de rotation, on qualifie l'onde d'elliptique gauche ou elliptique droite. Si on note φ ce déphasage, l'expression la plus générale du champ électrique est alors la suivante

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_0 \cos \theta \cos(\omega t - kz), \\ E_y(z, t) &= E_0 \sin \theta \cos(\omega t - kz + \varphi), \end{aligned}$$

de vecteur \vec{u} complexe correspondant

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{j\varphi} \sin \theta \end{pmatrix},$$

avec $j^2 = -1$.

4.5. Polariseur

III. Ondes électromagnétiques dans le vide

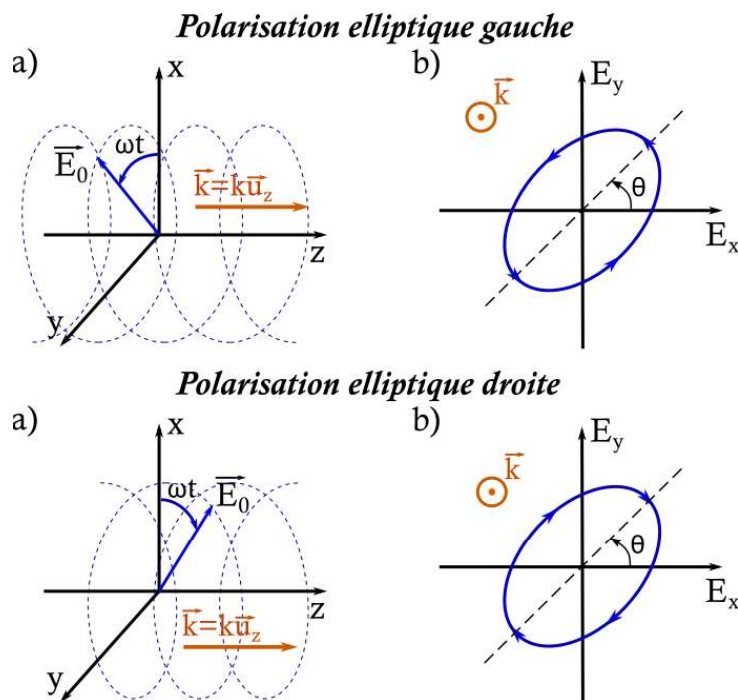


FIG. III.7. Structure d'une onde polarisée elliptique gauche et elliptique droite. a) Orientation du champ électrique dans l'espace. b) Représentation de la polarisation elliptique dans le plan $(E_y(\vec{r}, t), E_x(\vec{r}, t))$: il s'agit d'une ellipse, d'où le nom de *polarisation elliptique*. Si le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ tourne dans le sens horaire, alors on parle de *elliptique droite*. Si ce dernier tourne dans le sens anti-horaire, alors on parle de *elliptique gauche*.

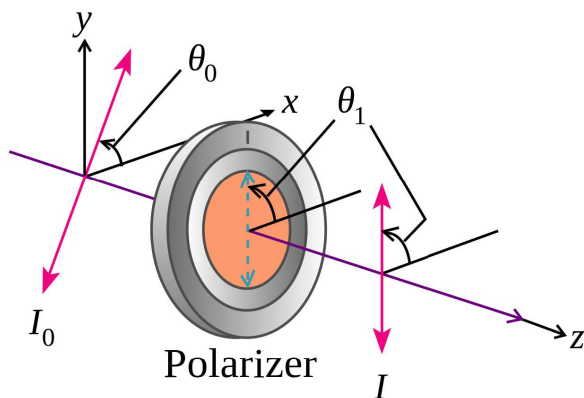


FIG. III.8. Fonctionnement d'un polariseur. L'angle entre le polariseur et la polarisation incidente est $\theta = \theta_1 - \theta_0$. Source : <https://en.wikipedia.org/wiki/Polarizer>.

Le *dichroïsme* est la propriété de certains matériaux d'absorber de manière sélective la lumière selon la direction du champ électrique incident (et donc de la polarisation de l'onde). Cette propriété est associée à l'anisotropie de certains matériaux (mais ce n'est pas une condition suffisante). Un polariseur est un filtre qui ne transmet que la composante du champ électrique parallèle à un axe donné du filtre, appelé axe du polariseur. Il permet donc de produire une onde polarisée rectiligne selon l'axe du polariseur. Ainsi, un polariseur permet de produire une onde polarisée rectiligne à partir d'une onde non-polarisée, d'une onde circulaire ou elliptique. Les matériaux dichroïques les plus courants sont les *polaroïdes*. Ces derniers contiennent de longues chaînes polymères parallèles, porteur de groupements chimiques résultant en un nuage d'électrons délocalisés sur toute la longueur de la molécule. Il en résulte une anisotropie de conductivité électrique. Or les ondes lumineuses ne se propagent pas

dans un milieu conducteur. Ces électrons absorbent la lumière dans le domaine UV-visible uniquement dans la direction permettant la conduction électrique et permettent ainsi de réaliser un polariseur. Le champ électrique ne pourra pas se propager dans la direction conductrice des chaînes du polymère, mais par contre se propa-

gera dans la direction isolante qui est perpendiculaire. Conventionnellement, la direction du polariseur est la direction laissant passer le champ électrique.

Un polariseur permet également d'analyser une lumière. En effet, il permet d'isoler une composante du champ électrique d'une onde donnée. En orientant le polariseur dans deux directions orthogonales, il est alors possible de mesurer l'intensité de deux composantes orthogonales. Il est également possible de caractériser l'onde à partir de l'analyse de l'intensité de l'onde après le polariseur en fonction de son orientation. Si l'onde initiale est polarisée rectilignement, aucune onde ne traversera le polariseur s'il est orienté perpendiculairement à la direction de la polarisation incidente. On repère ainsi une polarisation rectiligne. L'intensité $I(\theta)$ de l'onde après le polariseur en fonction de l'angle θ entre la direction de polarisation et la direction du polariseur suit la loi de Malus¹

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta,$$

où I_0 est l'intensité de l'onde incidente. En revanche, si la polarisation incidente est elliptique, l'intensité en sortie de polariseur est modulée en fonction de θ entre un maximum I_{\max} et un minimum I_{\min} d'intensité mais ne s'annule pas. En repérant le maximum d'intensité, il est possible alors d'accéder au grand axe de l'ellipse correspondante, et le rapport I_{\max}/I_{\min} permet de quantifier le degré d'ellipticité de la polarisation. Dans le cas d'une polarisation incidente circulaire, l'intensité en sortie de polariseur est constante, indépendante de θ . Lorsqu'un polariseur est utilisé pour analyser une onde, on le qualifie d'*analyseur*.

Applications : les écrans à cristaux liquides (LCD) mais également le cinéma 3D (IMAX-3D exploite une technologie à base de polarisations rectilignes orthogonales, RealD 3D à base de polarisations circulaires). L'analyse de la polarisation de la lumière est également utilisé en microscopie et en contrôle non-destructif pour la mesure des contraintes mécaniques dans les matériaux (photoélastométrie).

Références : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Polarisation_\(optique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Polarisation_(optique)).

5. Énergie d'une onde électromagnétique

5.1. Conservation de l'énergie électromagnétique

Définition : Vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface est égal à la puissance véhiculée par l'onde à travers cette surface.

$$\varphi_E = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{\Sigma}.$$

On a

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}).$$

Or, on a la relation d'analyse vectorielle suivante

$$\operatorname{div} \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b},$$

soit

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \vec{E}}_{=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \vec{B}}_{=\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

On en déduit alors

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}.$$

1. la loi de Malus sera vue en détails en TD.

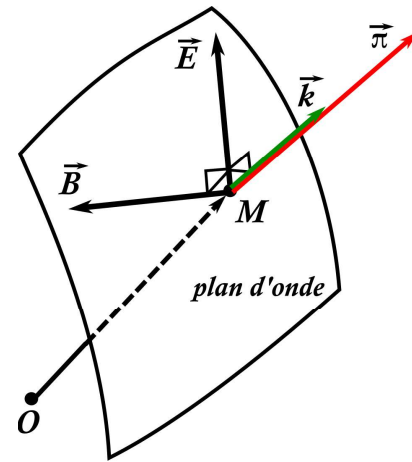


FIG. III.9. Définition du vecteur de Poynting.

III. Ondes électromagnétiques dans le vide

On introduit la **densité volumique d'énergie électromagnétique** u (unité SI : J/m³) selon

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

On obtient alors l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique

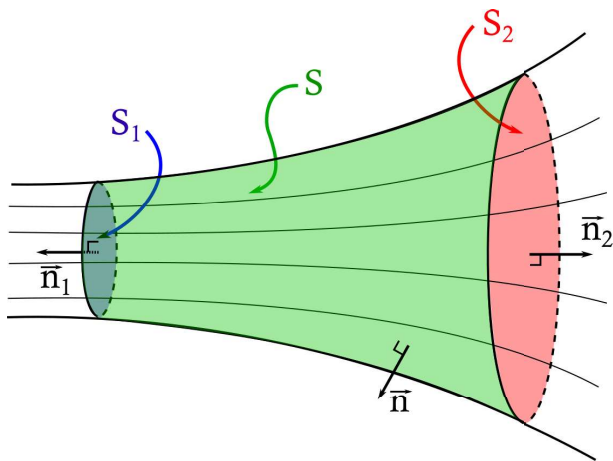
$$\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

En intégrant cette dernière sur un volume V

$$\iiint_V \left(\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Soit Σ la surface orientée délimitant le volume V . En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky au champ de vecteur $\vec{\Pi}$ sur la surface Σ , on obtient

$$\iiint_V \text{div } \vec{\Pi} dV = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{\Sigma}.$$



Considérons le volume délimité par un tube de lignes de champs de vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de surface latérale S , fermée par des sections S_1 et S_2 (voir Fig. III.10). On a alors la surface fermée

$$\Sigma = S_1 \cup S \cup S_2.$$

On note E l'énergie électromagnétique contenue dans le volume V délimité par la surface fermée Σ , et ϕ_i le flux à travers la surface S_i de la gauche vers la droite.

$$E = \iiint_V u dV,$$

et donc

FIG. III.10. Bilan d'énergie électromagnétique dans un tube de champ de surface latérale S , fermé par les surfaces S_1 et S_2 .

$$\iint_{S_1} \vec{\Pi} \cdot \vec{n}_1 d\Sigma_1 + \underbrace{\iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} d\Sigma}_{=0} + \iint_{S_2} \vec{\Pi} \cdot \vec{n}_2 d\Sigma_2 + \frac{\partial E}{\partial t} = 0.$$

On obtient alors la relation suivante entre l'énergie entrant en S_1 (ϕ_1), l'énergie sortant en S_2 (ϕ_2) et la variation d'énergie dans le volume V ($\frac{\partial E}{\partial t}$)

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\partial E}{\partial t}.$$

5.2. Flux lumineux et vecteur de Poynting

Le flux lumineux est le flux du vecteur de Poynting, c'est-à-dire le flux d'énergie électromagnétique. L'unité SI du vecteur de Poynting est le W/m^2 . L'unité SI du flux lumineux est le watt W .

Exemple : rayonnement solaire sur la Terre. La puissance surfacique reçue est $\|\vec{I}\| = 1 \text{ kW/m}^2$, et la puissance intégrée reçue est de $\|\vec{I}\| \times \text{surface utile}$. Une application exploitant cette puissance surfacique est la production d'électricité avec des *panneaux solaires*.

Une source lumineuse peut être directive (ex. le laser). Dans ce cas, l'intensité lumineuse est une grandeur plus adaptée que l'intensité surfacique. Différentes applications industrielles (nombreuses) des lasers sont présentées dans le document suivant (document CEA) : <http://www.cea.fr/multimedia/Pages/editions/livrets-thematiques/le-laser.aspx>

5.3. Interprétation corpusculaire

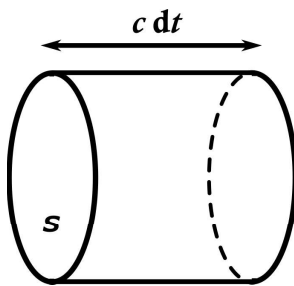


FIG. III.11. Interprétation corpusculaire du flux de photons.

On considère une surface S traversée par un flux lumineux pendant un intervalle de temps dt (voir Fig. III.11). La lumière se propage à la vitesse c . On considère un rayonnement de fréquence ν . L'énergie qui a traversé la section S pendant dt est

$$\|\vec{I}\| \times S \times dt.$$

Cette énergie est contenue dans le cylindre de longueur cdt et de section S . Soit n la densité de photons à la fréquence ν . L'énergie dans le cylindre est alors également

$$n \times S \times cdt \times h\nu.$$

Donc

$$\|\vec{I}\| S dt = n S c dt h \nu.$$

Or, la densité d'énergie électromagnétique est directement liée à la densité de photons

$$u = nh\nu.$$

On obtient finalement la relation

$$\boxed{\|\vec{I}\| = uc}.$$

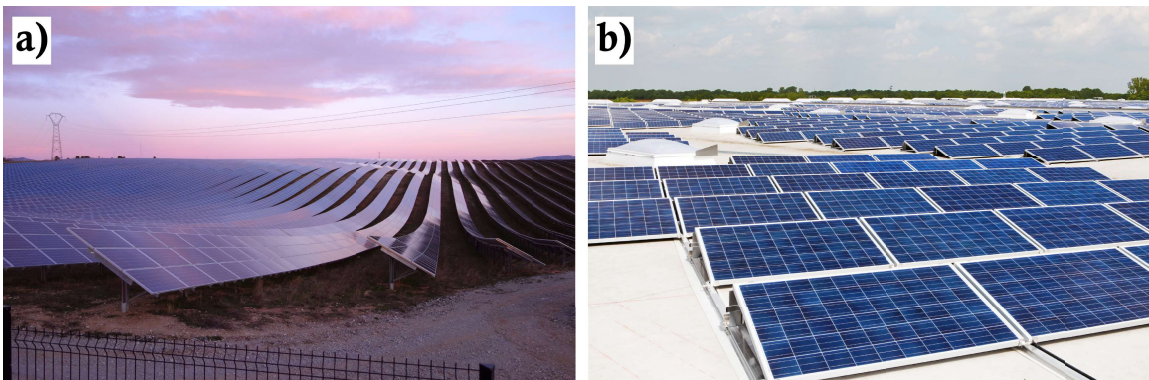


FIG. III.12. a) Parc de centrales photovoltaïques de la Colle des Mées (Alpes-de-Haute-Provence). b) Toiture photovoltaïque de 1MW à Hanovre (Allemagne). Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Panneau_solaire.

III. Ondes électromagnétiques dans le vide

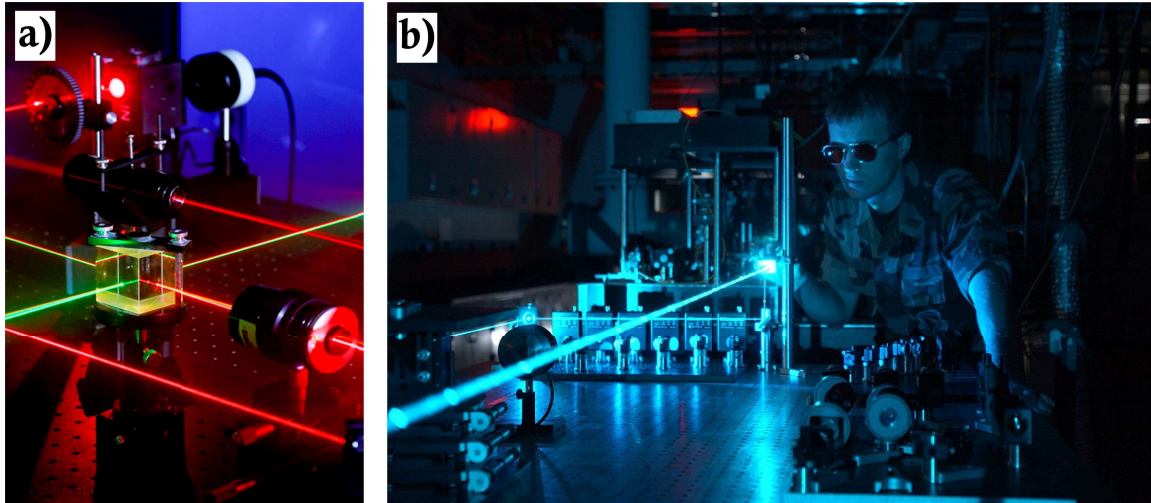


FIG. III.13. a) Alignement d'un système laser au Naval Surface Warfare Centre (NSWC), Corona Division Microwave/Electro-Optic (MS32) Electronics Engineer Daniel King. (photo U.S. Navy par Greg Vojtko, identifiant 110419-N-HW977-353). Source : https://www.navy.mil/view_image.asp?id=100735 b) Scientifique militaire alignant un laser sur un banc de test, United states Air Force Research Laboratory (AFRL) Directed Energy Directorate (identifiant photo 090809-F-5527s-0001). Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Military_laser_experiment.jpg

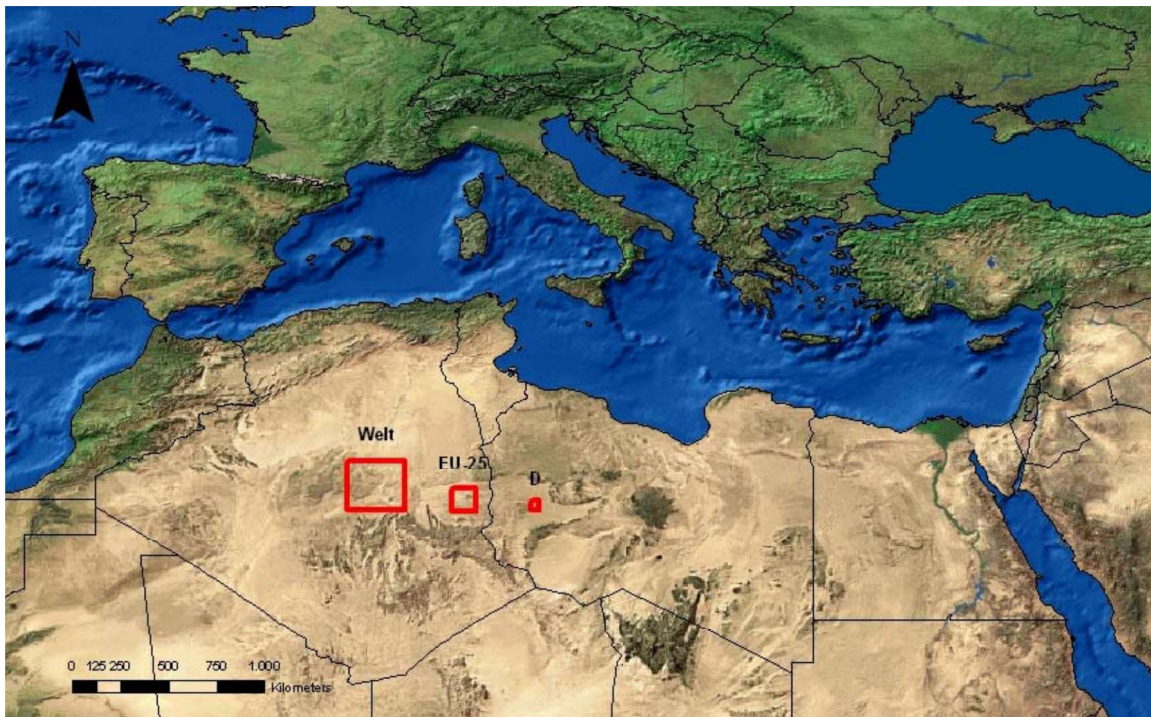


FIG. III.14. Potentiel de l'énergie solaire : surfaces utiles nécessaires pour réaliser une centrale solaire permettant de produire l'énergie nécessaire au monde entier (carré rouge de gauche), pour l'Europe (carré rouge au milieu) et pour l'Allemagne (carré de droite). Source : Diploma Thesis de Nadine May, *Eco-balance of a Solar Electricity Transmission from North Africa to Europe*, Technical University of Braunschweig (Allemagne), https://www.dlr.de/tt/Portaldata/41/Resourcen/dokumente/institut/system/projects/ECobalance_of_a_Solar_Electricity_Transmission.pdf

Chapitre IV

Ondes électromagnétiques dans les milieux

Dans le précédent chapitre, nous avons vu que les équations de Maxwell dans le vide possèdent des solutions ondulatoires, se propageant à la vitesse de la lumière, où champs électrique et magnétique sont dynamiquement couplés. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la propagation d'ondes électromagnétique dans les milieux matériels, et plus précisément deux milieux : les milieux conducteurs (en général réfléchissants) et les milieux dit diélectriques (en général transparents). Dans le deuxième cas, nous introduirons la notion importante d'indice optique.

1. Propagation dans un milieu matériel

1.1. Cas d'un conducteur

On considère un matériau conducteur, ohmique. La loi d'Ohm locale donne $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, où σ est la conductivité électrique. On a les équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Dans un métal, $\rho = 0$ (pas de charges, voir chapitre 1) pour respecter la neutralité électrique. Donc

$$\begin{aligned}\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}) &= \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \Leftrightarrow \vec{\operatorname{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \Leftrightarrow -\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} &= \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \Leftrightarrow \Delta \vec{E} - \underbrace{\vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E}}_{=0} &= \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

D'où l'équation de l'onde dans un métal

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (\text{IV.1})$$

On cherche une solution de type OPPM

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux

Avec une solution de cette forme, l'équation (IV.1) devient

$$-k^2 \vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E} = j\omega\mu_0\sigma \vec{E},$$

soit

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma.$$

C'est la relation de dispersion d'une OPPM dans un métal. Dans le cas du cuivre, $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. On cherche à estimer l'importance relative de la partie imaginaire par rapport à la partie réelle de k^2 , et évaluer s'il est possible de négliger un des deux termes par rapport à l'autre. Pour cela, il faut évaluer un ordre de grandeur du rapport de ces deux termes. En exploitant la relation $\mu_0\epsilon_0c^2 = 1$, on a

$$\frac{\omega\mu_0\sigma}{\omega^2/c^2} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}.$$

Pour les ondes optiques, $f \sim 10^{14} \text{ Hz}$ soit $\omega \sim 10^{15} \text{ rad/s}$. La grandeur $\omega_c = \sigma/\epsilon_0$ est une pulsation caractéristique.

Métal	conductivité ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)	$\omega_c = \sigma/\epsilon_0$ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	$\lambda = 2\pi c/\omega_c$ (Å)
Cu	$6 \cdot 10^7$	$6,8 \cdot 10^{18}$	2,8
Au	$4,5 \cdot 10^7$	$5,1 \cdot 10^{18}$	3,7
Fe	$1 \cdot 10^7$	$1,13 \cdot 10^{18}$	17
Ag	$6,3 \cdot 10^7$	$7,13 \cdot 10^{18}$	2,6

Pour les ondes électromagnétiques aux fréquences allant jusqu'aux rayons X, on peut négliger le terme ω^2/c^2 devant $\omega\mu_0\sigma$ pour les métaux ohmiques. Dans cette limite, l'équation d'onde se résume à

$$\Delta \vec{E} = \mu_0\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Il s'agit d'une équation de type diffusion. On cherche une solution du type OPPM

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{r} \cdot \vec{r})}.$$

En complexe, cette équation devient $-k^2 \vec{E} = j\omega\mu_0\sigma \vec{E}$, et on obtient ainsi la relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans un métal

$$k^2 = -j\omega\mu_0\sigma.$$

On a également la relation remarquable

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)\right)^2 = -j.$$

On introduit la grandeur δ homogène à une longueur telle que

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}},$$

soit

$$k = \pm \frac{1}{\delta}(1-j).$$

Si on considère une onde incidente se propageant dans la direction $\vec{k} = k\vec{u}_z$, le champ électrique dans le métal prend la forme suivante

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}.$$

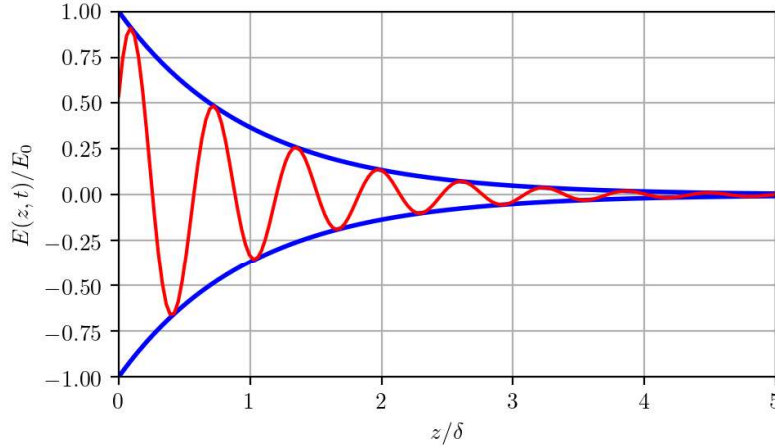


FIG. IV.1. Atténuation exponentielle d’une onde électromagnétique se propageant dans un métal dans la direction Oz , avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$. En bleu : enveloppe exponentielle. En rouge : représentation du champ $E(z,t)$ à un instant quelconque.

L’onde est **atténuée** exponentiellement sur une longueur caractéristique δ , appelée **épaisseur de peau**. La dépendance de δ avec la pulsation de l’onde est $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, avec ω inférieur au cas limite des ondes UV ($\omega \sim 10^{15} - 10^{16}$ rad/s). Pour le cuivre, dans le visible, $\omega \sim 10^{14} - 10^{15}$ rad/s soit des longueurs de peau de l’ordre de 10nm typiquement ! Ainsi, $\delta \ll \lambda$ pour des ondes optiques ou de fréquences inférieures : **une onde optique ou de fréquence inférieure ne se propage pas dans un métal**. La densité volumique de courant $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ est également atténuée sur une distance caractéristique δ . Si la conductivité électrique σ augmente, l’amplitude du courant augmente d’autant (car $\vec{j} = \sigma\vec{E}$) mais il s’atténue sur une distance plus courte (voir Fig.). Dans la limite où $\sigma \rightarrow +\infty$, la densité de courant volumique se concentre à la surface du conducteur et devient une distribution surfacique.

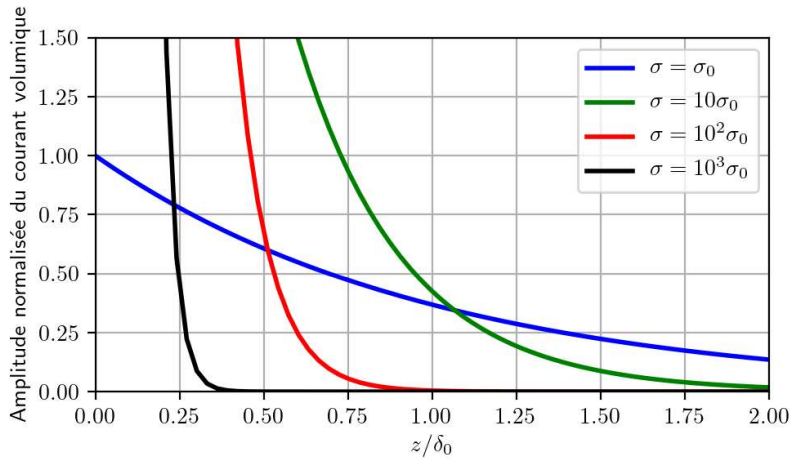


FIG. IV.2. Amplitude de la densité de courant volumique \vec{j} dans un métal de conductivité σ pour une onde se propageant dans la direction Oz , pour quatre valeurs de σ en fonction de σ_0 une valeur de référence. On note $\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$ la longueur de peau associée à la conductivité de référence.

IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux

Cas limite : modèle du métal parfait

Le métal parfait est une situation idéale où $\sigma \rightarrow +\infty$. Par conséquent, on a $\delta \rightarrow 0$. Alors dans le métal $\vec{E} = \vec{0}$ et par conséquent $\vec{j} = \vec{0}$. Mais dans ce modèle limite, il existe des courants surfaciques non nuls $\vec{j}_S(\vec{r}, t)$ à l'interface entre le métal et le milieu extérieur (l'air par exemple). On peut évaluer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Ce dernier est un produit de deux champs, **il est indispensable de revenir en notation réelle pour l'évaluer!** Si on considère une onde incidente polarisée selon \vec{u}_x , on a

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right).$$

Il faut calculer le champ \vec{B} . Pour cela, on considère l'équation de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B},$$

où l'équivalence n'est vraie que pour une onde plane monochromatique de vecteur d'onde \vec{k} . Ainsi, pour une onde plane monochromatique de vecteur d'onde \vec{k} ,

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}.$$

En notation réelle (attention, $k \in \mathbb{C}$), on obtient alors

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{\delta \omega} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{z}{\delta}} \left(\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \right).$$

D'où l'expression du vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} e^{-2\frac{z}{\delta}} \left(\cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2\omega t - 2\frac{z}{\delta}\right) \right) \vec{u}_z.$$

En pratique, on s'intéresse à la valeur moyenne du vecteur de Poynting

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \delta \omega} e^{-2\frac{z}{\delta}} \vec{u}_z.$$

Ainsi, le flux d'énergie moyen décroît sur une échelle caractéristique $\delta/2$.

1.2. Propagation dans un milieu diélectrique



Définition : diélectrique

Un milieu est dit diélectrique s'il ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. Ainsi, il s'agit d'un milieu **isolant**, permettant la propagation des ondes électromagnétiques : c'est un milieu "transparent". Ethymologiquement, diélectrique a pour suffixe *dia* issu du grec $\delta\iota\alpha$ signifiant à *travers*.

IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux

Dans un tel milieu, $\vec{j} = \vec{0}$. L'interaction entre l'onde et la matière peut être décrite à l'aide d'une seule grandeur : la permittivité diélectrique relative ϵ_r . Dans ce cas, on admet que les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme suivante

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{IV.2})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{IV.3})$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}, \quad (\text{IV.4})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{IV.5})$$

La grandeur $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ est la permittivité absolue du milieu considéré. Établissons l'équation d'onde

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E},$$

d'où l'équation d'onde dans un milieu diélectrique de permittivité relative ϵ_r

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On introduit la vitesse de phase v

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

permettant de reformuler l'équation d'onde sous la forme

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Ainsi, la propagation d'une onde dans un diélectrique est identique à la propagation dans le vide mais à la seule exception qu'elle se propage à une vitesse corrigée $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$. On introduit l'indice optique n selon

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \Leftrightarrow v = \frac{c}{n}.$$

Alors, on a la relation de dispersion

$$k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow k = n \frac{\omega}{c} \text{ ou } k = nk_0,$$

k_0 étant le vecteur d'onde si on était dans le vide. On définit toujours la longueur d'onde selon

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ donc } \lambda = \frac{\lambda_0}{n},$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Ainsi, la longueur d'onde dépend du milieu de propagation.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right),$$

soit

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}\left(0, t - \frac{z}{v}\right),$$

et ainsi l'onde se déplace à une vitesse réduite $v < c$ ($n > 1$). Si l'indice est réel, il n'y a pas d'absorption. Si l'indice a une partie imaginaire non nulle, alors il y a de l'absorption.

IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux

Calcul du vecteur de Poynting

On a toujours

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega},$$

mais la relation de dispersion est modifiée. Ainsi, pour une propagation dans la direction \vec{u} , on a

$$\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u},$$

et en norme

$$\|\vec{B}\| = n \frac{\|\vec{E}\|}{c}.$$

On retrouve une structure d'onde plane où $(\vec{k}; \vec{E}; \vec{B})$ forme un trièdre direct. On admet également que dans un milieu diélectrique, le vecteur de Poynting est toujours défini selon

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

On considère une onde plane monochromatique, progressive dans le sens des z positifs ($\vec{k} = +k\vec{u}_z$ avec $k > 0$), polarisée rectilignement selon \vec{u}_x

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - kz)},$$

et alors, après calculs,

$$\vec{\Pi} = \frac{nE_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

D'où la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{nE_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

2. D'un milieu à un autre : réflexion

2.1. Relations de passage du champ

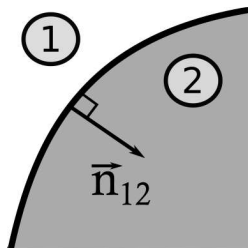


FIG. IV.3. Interface entre deux milieux 1 et 2 pour établir les relations de passage des champs électrique et magnétique.

On considère une interface entre deux milieux 1 et 2, dont on note \vec{n}_{12} le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2. On note également σ_S la densité surfacique de charge à cette interface, et \vec{j}_S le vecteur densité de courant surfacique à cette interface. Les champs électrique \vec{E}_1 et magnétique \vec{B}_1 dans le milieu 1 à l'interface, ainsi que les champs électrique \vec{E}_2 et magnétique \vec{B}_2 dans le milieu 2 à l'interface vérifient les relations de passage suivantes, **que l'on admettra**

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \vec{n}_{12},$$

et

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}.$$

2.2. Réflexion sur un miroir métallique

Un miroir est un dépôt métallique sur du verre (protection). Dans un métal parfait, $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$ (si sa conductivité électrique est infinie), $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$ et la densité surfacique de charge à l'interface est nulle : $\sigma_S = 0$ (il ne peut pas y avoir de charges libres sinon elles se déplaceraient). En revanche, on peut avoir des courants surfaciques \vec{j}_S non nuls. On considère une onde incidente de la forme

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_i^0 e^{j(\omega t - k_i z)} \vec{u}_x,$$

se propageant vers le miroir situé en $z = 0$. L'onde ne pénètre pas le miroir parfait mais une onde réfléchie apparaît

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = E_r^0 e^{j(\omega t + k_r z)} \vec{u}_x.$$

Ici on a un signe + devant le vecteur d'onde car l'onde réfléchie se propage vers les z négatifs ($\vec{k} = -k_r \vec{u}_z$). L'onde réfléchie oscille à la même fréquence que l'onde incidente. Si on exprime la continuité du champ électrique à la surface du métal, on obtient

$$\vec{E}_i(z = 0^-, t) + \vec{E}_r(z = 0^-, t) = \vec{E}_{\text{métal}}(z = 0^+, t) = \vec{0},$$

soit

$$E_i^0 e^{j\omega t} + E_r^0 e^{j\omega t} = 0.$$

Ainsi, on obtient immédiatement

$$\boxed{E_r^0 = -E_i^0}.$$

Pour le champ magnétique, on a

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega},$$

soit

$$\vec{B}_i = \frac{E_i^0}{c} e^{j(\omega t - k_i z)} \vec{u}_y,$$

et, en prenant garde que $\vec{k}_r = -k_r \vec{u}_z$,

$$\vec{B}_r = -\frac{E_r^0}{c} e^{j(\omega t + k_r z)} \vec{u}_y.$$

donc, en exprimant les champs en fonction de E_i^0 ,

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = -E_i^0 e^{j(\omega t + k_i z)} \vec{u}_x,$$

$$\vec{B}_r(\vec{r}, t) = \frac{E_i^0}{c} e^{j(\omega t + k_i z)} \vec{u}_y.$$

On en déduit le courant \vec{j}_S à la surface du métal (en revenant en notation réelle)

$$\mu_0 \vec{j}_S = \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_{T,2} - \vec{B}_{T,1}) = -\vec{u}_z \wedge \left(\frac{2E_0}{c} \cos \omega t \vec{u}_y \right),$$

soit

$$\boxed{\vec{j}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{u}_x}.$$

Ces courants surfaciques ont pour origine l'excitation des électrons du métal par le champ électrique de l'onde incidente.

IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux

2.3. Ondes stationnaires

La superposition d'une onde incidente à l'onde réfléchie sur un miroir parfait établit une onde dite stationnaire. En notation réelle ($k_i = k_r = k$)

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_i(\vec{r}, t) + \vec{E}_r(\vec{r}, t) = E_{0,i} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0,r} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x.$$

Or, $E_{0,r} = -E_{0,i} = -E_0$ d'où

$$\vec{E}_{\text{tot}} = E_0 (\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)) \vec{u}_x.$$

En exploitant la formule de trigonométrie suivante

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

on obtient $\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz) = 2 \sin \omega t \sin kz$, d'où

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}}(\vec{r}, t) = 2E_0 \sin \omega t \sin kz \vec{u}_x.}$$

Il s'agit d'une solution de l'équation d'onde à *variables séparées*, avec un découplage entre les dépendances temporelles et spatiales. L'onde ne se propage plus, elle "oscille sur place". On a des **noeuds** et des **ventres**.

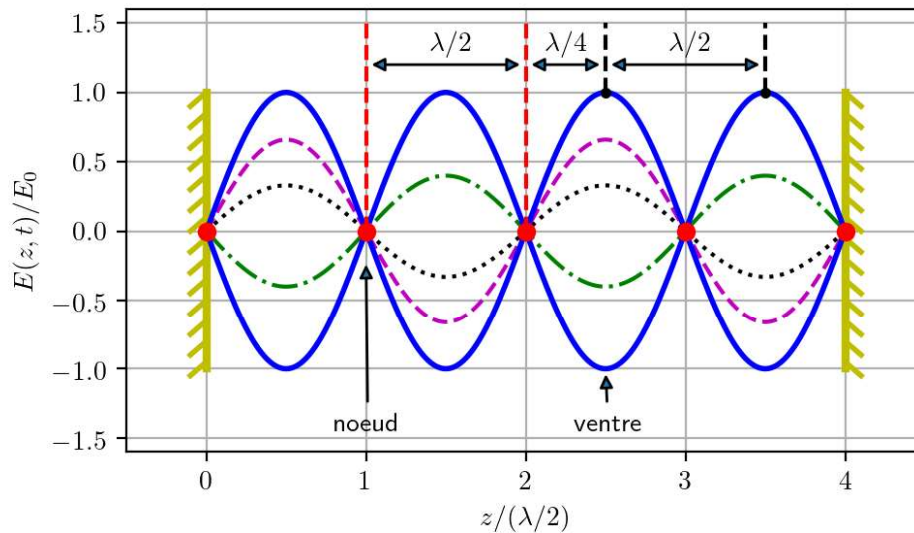


FIG. IV.4. Structure d'une onde stationnaire contenue entre deux miroirs. Représentation de l'onde (en pointillés et en tirets) pour trois instants différents. L'amplitude de l'onde est contenue dans l'enveloppe en bleu (traits continus). Les noeuds sont des minima d'amplitude (en valeur absolue) à chaque instant, alors que les ventres sont des maxima d'amplitude (en valeur absolue) à chaque instant. Noeuds et ventres sont périodiques spatialement de $\lambda/2$. La distance entre un noeud et un ventre adjacents est de $\lambda/4$.

Périodicité des noeuds

Par définition, le champ électrique est nul à tout instant à un noeud, soit

$$\sin kz = 0 \Leftrightarrow 2\pi \frac{z}{\lambda} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{\lambda}{2} n.$$

D'où la périodicité des noeuds

$$\boxed{\Delta z = \frac{\lambda}{2}.}$$

Périodicité des ventres

Par définition, le champ électrique est maximal localement à tout instant à un ventre, soit

$$\sin kz = \pm 1 \Leftrightarrow 2\pi \frac{z}{\lambda} = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{\lambda}{2}n + \frac{\lambda}{4},$$

D'où la périodicité des ventres

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2}.$$

Pour le champ magnétique \vec{B} , on calcul de la même manière

$$B_y = \frac{E_0}{c} (\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)), \quad \text{et} \quad \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

d'où

$$B_y = \frac{2E_0}{c} \cos \omega t \cos kz.$$

On a un ventre de champ magnétique au niveau du miroir.

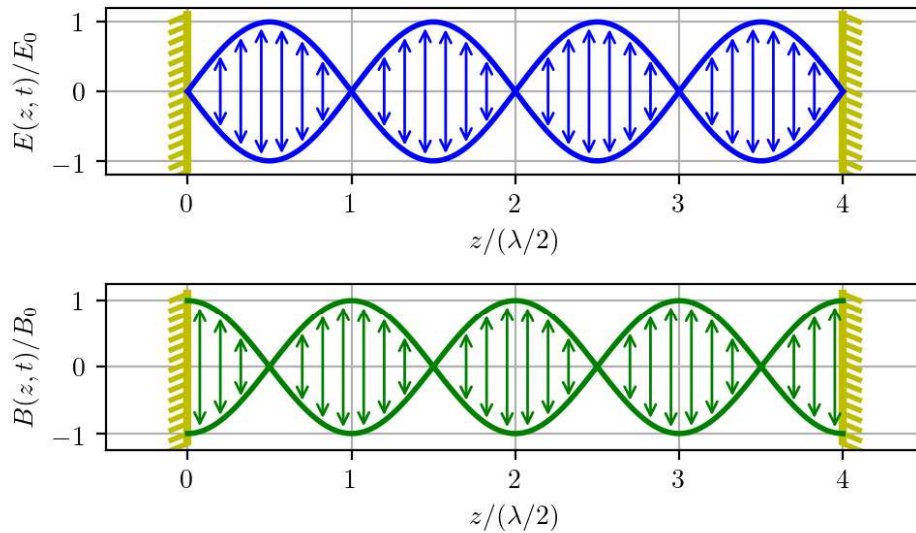


FIG. IV.5. Structure d'une onde stationnaire contenue entre deux miroirs. Représentation de l'amplitude de champ électrique et de champ magnétique. Les noeuds de champ électrique coïncide aux ventres de champ magnétique et vice versa. On a donc un noeud de champ électrique mais un ventre de champ magnétique au niveau des miroirs.

2.4. Bilan énergétique

Vecteur de Poynting de l'onde incidente $\vec{\Pi}_i$

$$\vec{\Pi}_i = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit

$$\vec{\Pi}_i = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux

Vecteur de Poynting moyen

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

Pour le rayon réfléchi, on a

$$\vec{\Pi}_r = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} -E_0 \cos(\omega t + kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{\Pi}_r = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kz) \vec{u}_z.$$

Et le vecteur de Poynting réfléchi moyen devient

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

On en déduit

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle + \langle \vec{\Pi}_r \rangle = \vec{0}.$$

Il n'y a pas de pertes, toute l'énergie incidente est réfléchi (miroir parfait).

3. Passage entre deux diélectriques : transmission

3.1. Incidence normale

Définition : dioptr

Un dioptr est la surface à l'interface entre deux milieux diélectriques de natures différentes.

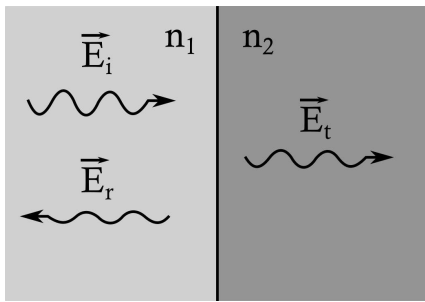


FIG. IV.6. Transmission et réflexion d'une onde au travers d'un dioptr.

Lorsqu'une onde incidente arrive sur un dioptr, on peut avoir une onde réfléchi et une onde transmise. On considère un dioptr entre un milieu 1 d'indice n_1 et un milieu 2 d'indice n_2 . On considère que le dioptr est un plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, soumis à une onde incidente polarisée rectilignement selon \vec{u}_x . Les vecteurs d'ondes incident, réfléchi et transmis sont respectivement les suivants

$$\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_z ; \vec{k}_r = -n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_z ; \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \vec{u}_z.$$

Les ondes sont toutes à la pulsation ω . On a alors

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_i^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_i z)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_i(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \frac{E_i^0}{c} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_i z)},$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_r^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_r z)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_r(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \frac{E_r^0}{c} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_r z)},$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_r^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t + k_r z)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_r(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -n_1 \frac{E_r^0}{c} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j(\omega t + k_r z)},$$

où l'on a pris $k_r > 0$ et $\vec{k}_r = -k_r \vec{u}_z$.

Relations de passage des champs à l'interface

À l'interface, on

$$\Delta E_T = 0 \Rightarrow E_i^0 + E_r^0 = E_t^0.$$

Il n'y a pas de courants dans les milieux (diélectriques) donc

$$\Delta B_T = 0 \Rightarrow B_i^0 + B_r^0 = B_t^0,$$

d'où le système d'équations

$$\begin{cases} E_i^0 + E_r^0 = E_t^0 \\ n_1 E_i^0 - n_1 E_r^0 = n_2 E_t^0 \end{cases}, \quad (IV.6)$$

soit

$$\begin{cases} 2E_i^0 = \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) E_t^0 \\ 2E_r^0 = \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) E_t^0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_r^0 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i^0} \quad \text{et} \quad \boxed{E_t^0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i^0}. \quad (IV.7)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi}_i \rangle &= \frac{n_1 E_{i,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z, \\ \langle \vec{\Pi}_r \rangle &= -\frac{n_1 E_{r,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = -\frac{n_1 (n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \frac{E_{i,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z, \\ \langle \vec{\Pi}_t \rangle &= \frac{n_2 E_{t,0}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = \frac{4n_1^2 n_2}{2\mu_0 c (n_1 + n_2)^2} E_{i,0}^2 \vec{u}_z. \end{aligned}$$

On en déduit les coefficients de transmission et réflexion en **énergie** R et T

$$\boxed{R = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{T = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}}.$$

On remarque en particulier que

$$\boxed{R + T = 1},$$

exprimant la conservation de l'énergie.

3.2. Lois de Descartes

On considère une interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 (voir Fig. IV.7), sur laquelle arrive une onde incidente avec un vecteur d'onde \vec{k}_i . Une onde est transmise avec un vecteur d'onde \vec{k}_t et une onde est réfléchie avec un vecteur d'onde \vec{k}_r . Le vecteur d'onde \vec{k}_i et la normale à l'interface définissent le plan d'incidence. On note i_1 , r et i_2 les angles entre la normale à l'interface et les vecteurs d'ondes de l'onde incidente, réfléchie et transmise.

On a alors les trois lois de Descartes suivantes

— **1^{er} loi de Descartes : le plan d'incidence contient les rayons incidents, réfléchis et réfractés (admis).**

— **2^e loi de Descartes (loi de la réflexion) :** $\boxed{i_1 = -r}$.

— **3^e loi de Descartes (loi de la réfraction) :** $\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$.

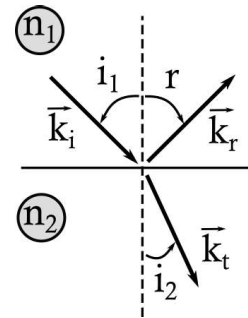


FIG. IV.7. Lois de Descartes pour une onde incidente avec un vecteur d'onde \vec{k}_i . Une onde est transmise avec un vecteur d'onde \vec{k}_t et une onde est réfléchie avec un vecteur d'onde \vec{k}_r . Le vecteur d'onde \vec{k}_i et la normale à l'interface définissent le plan d'incidence.

IV. Ondes électromagnétiques dans les milieux

3.3. Principe de Fermat

Soit A et B deux points de l'espace (d'indice dépendant de la position $n(\vec{r})$) reliés par un chemin \mathcal{C} . On définit le chemin optique le long de \mathcal{C} selon

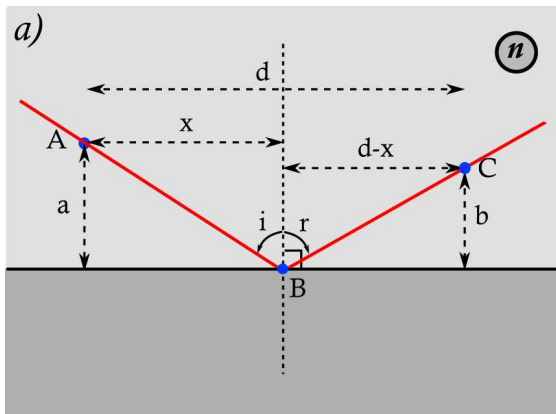
$$L[AB] = \int_{\mathcal{C}} n ds,$$

où s est l'abscisse curviligne le long du chemin.

i Principe de Fermat

Le chemin optique est extrémal lorsque le chemin \mathcal{C} suivi est celui des rayons lumineux. La lumière suit un chemin rendant le chemin optique correspondant extrémal : "la lumière emprunte le chemin le plus court" (cas le plus fréquent).

Conséquence importante : dans un milieu homogène, la propagation s'effectue en ligne droite. Le principe de Fermat permet de démontrer les lois de Descartes.



Cas de la réflexion : A et C sont fixes, B et x sont variables. Évaluons le chemin optique entre A et C.

$$\begin{aligned} L[AC] &= n(AB + BC) \\ &= n \left(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(d-x)^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

Si le chemin optique est extrémal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L[AC] &= 0 \\ &= n \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

Il faut donc que

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}},$$

$\sin i \qquad \qquad \qquad -\sin r$

Cas de la réfraction : A et C sont fixes, B et x sont variables. Évaluons le chemin optique entre A et C.

$$L[AC] = n_1 AB + n_2 BC = n_1 \sqrt{x^2 + a^2} + n_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}.$$

d'où

$$i = -r.$$

Si le chemin optique est extrémal

$$\frac{d}{dx} L[AC] = 0 = n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - n_2 \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0.$$

$\sin i_1 \qquad \qquad \qquad \sin i_2$

D'où la loi de la réfraction

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

FIG. IV.8. Démonstration de la loi de la réflexion (a) et de la réfraction (b) à partir du principe de Fermat.

Chapitre V

Propriétés des ondes

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié les ondes électromagnétiques et leurs propriétés. Il s'agit d'ondes transverses : les grandeurs physiques ondulatoires oscillent perpendiculairement à la direction de propagation. Il s'agit d'ondes vectorielles : les grandeurs ondulatoires sont des grandeurs vectorielles. Cependant il existe en grand nombre d'ondes autres que les ondes électromagnétiques, notamment en mécanique. Ces ondes peuvent être longitudinales et scalaires, comme les ondes acoustiques où la grandeur ondulatoire est la surpression du milieu matériel, grandeur scalaire oscillant dans la direction de propagation. Dans ce chapitre, nous allons étudier brièvement un exemple d'onde mécanique scalaire transverse : les ondes de déformation sur une corde vibrante. Cette étude sera suivie d'une brève présentation des propriétés générales de l'équation de D'Alembert, et donc de résultats communs aux ondes régies par cette équation.

1. Ondes sur une corde vibrante

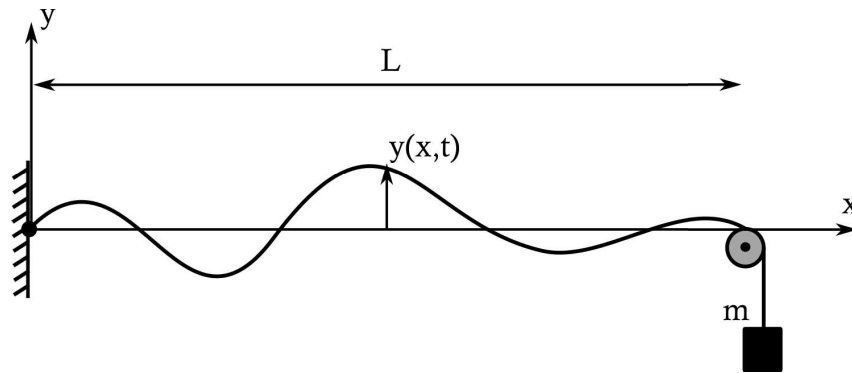


FIG. V.1. Expérience de la corde de Melde - géométrie considérée.

On considère une corde tendue par une masse m , soumise à une tension \vec{T} avec $\|\vec{T}\| = mg$. Sur cette corde tendue, on peut propager une vibration, une déformation quelconque mais localisée spatialement. On peut également propager une déformation sinusoïdale (régime forcé). On peut faire vibrer une corde sur ses modes propres, on parle d'ondes stationnaires (cf. corde de guitare). Pour satisfaire aux conditions aux limites, la longueur de la corde L est reliée à la longueur d'onde λ par la relation

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $y(x,t)$ la déformation de la corde en x à l'instant t et μ la masse linéique de la corde. Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- la corde est supposée être sans raideur, elle n'oppose aucune résistance à sa déformation et la tension est tangente en tout point de la corde, constante en norme ;
- on suppose la tension de la corde suffisamment importante pour pouvoir négliger l'influence de la pesanteur ;
- on suppose, sans perte de généralité, que les mouvements de la cordes ont lieu dans le plan xOy ;
- on néglige les phénomènes de dissipation ;
- on se place dans la limite des faibles déformations, telles que $|\alpha(x,t)| \ll 1$.

V. Propriétés des ondes

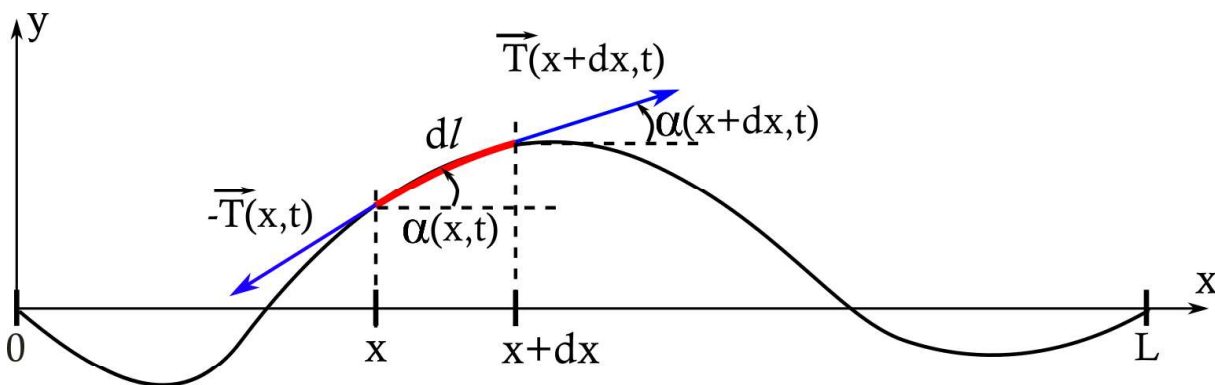


FIG. V.2. Principe de l'établissement de l'équation d'onde de vibration $y(x, t)$: application du principe fondamental de la dynamique à un élément de corde entre x et $x + dx$.

On considère un élément de corde dx et on lui applique le PFD

$$\mu dx \frac{d^2 y}{dt^2} = \left(\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) \right) \cdot \vec{u}_y.$$

Or, $\|\vec{T}(x + dx, t)\| = \|\vec{T}(x, t)\| = T$ pour une corde sans raideur, et on définit l'angle α selon

$$\vec{T}(x, t) \cdot \vec{u}_y = T \sin \alpha(x, t).$$

Pour les petites déformations,

$$\sin \alpha(x, t) \approx \alpha(x, t) \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Donc

$$\left(\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) \right) \cdot \vec{u}_y = T (\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)) = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx,$$

d'où

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

D'où l'équation d'onde vérifiée par la vibration $y(x, t)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}},$$

avec v la célérité de l'onde

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

On obtient bien l'équation de D'Alembert et possède le même type de solutions.

- La vibration $y(x, t)$ est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde : il s'agit d'une **onde transverse**.
- La grandeur ondulatoire est scalaire : il s'agit d'une **onde scalaire**.

Par opposition, une onde électromagnétique est une onde **transverse** et **vectorielle**.

Cas de la corde de guitare : l'onde se réfléchit sur la fixation de la corde. Comme pour le miroir parfait des ondes électromagnétiques, on a une **onde stationnaire**. Aux points de fixation de la corde, l'amplitude y s'annule, donc la solution est de la forme

$$\boxed{y(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \sin(\omega t + \psi)}.$$

La relation de dispersion est, par analogie,

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

On impose deux conditions aux limites

$$y(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(x = L, t) = 0.$$

Toutes les fréquences ne permettront pas de satisfaire ces deux conditions simultanément.

$$y(x = 0, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0[\pi],$$

$$y(x = L, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

donc

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

D'où

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a un ensemble $\{\lambda_n\}$ discret de longueurs d'ondes admissibles. Les pulsations correspondantes sont alors

$$\omega_n = k_n v = n \frac{\pi v}{L} \Leftrightarrow \omega_n = n\omega_1 \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{\pi v}{L}.$$

On appelle le mode $n = 1$ le mode fondamental.

2. Propriétés de l'équation de D'Alembert

2.1. Solution générale

Soit $f(x, t)$ une fonction physiquement acceptable (mathématiquement continue, dérivable et bornée). On suppose que $f(x, t)$ vérifie l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Les solutions progressives de l'équation de D'Alembert font intervenir les variables naturelles $\alpha = x - vt$ et $\beta = x + vt$. En effectuant ce changement de variables, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \beta} = v \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right).$$

Donc l'équation de D'Alembert devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

V. Propriétés des ondes

Soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.}$$

Donc la solution générale est de la forme

$$\boxed{f(x,t) = g(x - vt) + h(x + vt).}$$

La solution générale est la superposition d'une onde progressive vers la droite et d'une onde progressive vers la gauche.

2.2. Linéarité

Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation de D'Alembert, alors

$$y = y_1 + y_2,$$

est également une solution. Plus généralement, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{y} = \lambda y_1 + \mu y_2,$$

est également une solution.

Interprétation : les ondes se superposent, peuvent se croiser et continuer d'exister ensuite.

2.3. Interférences et ondes stationnaires

Les interférences sont le résultat d'une superposition d'ondes cohérentes : même fréquence et différence de phase constante. Elles donnent naissance à des noeuds et des ventres de vibration, comme dans le cas des ondes stationnaires que l'on a vu.

$$\underbrace{A \cos(\omega t - kz)}_{\rightarrow\rightarrow} + \underbrace{A \cos(\omega t + kz)}_{\leftarrow\leftarrow} = 2A \times \underbrace{\cos \omega t}_{\text{vibration}} \times \underbrace{\cos kz}_{\text{amplitude de vib.}}$$

3. Ondes sonores

Une onde sonore se propage dans un milieu matériel : un gaz, un liquide, un solide. Une onde sonore ne se propage pas dans le vide. La grandeur physique qui se propage est une onde de surpression, $p(x,t)$, associée à un déplacement local $\vec{u}(x,t)$. Le champ de vecteur $\vec{u}(x,t)$ est le déplacement de matière, et $p(x,t)$ est la surpression telle que la pression totale $P = P_0 + p(x,t)$. Les champs $u(x,t)$ et $p(x,t)$ vérifient l'équation de D'Alembert.

On suppose une propagation dans un gaz et que les écoulements sont adiabatiques réversibles (donc isentropiques).

Coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s,$$

que l'on peut reformuler suivant en fonction de la masse volumique

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s.$$

On a la vitesse de l'écoulement

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

On admet que la vitesse de l'écoulement $\vec{v}(x,t)$ et la surpression $p(x,t)$ vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\chi_s \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad (\text{V.1})$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos. D'où l'on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

soit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

On retrouve bien l'équation de D'Alembert de célérité v

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}.$$

Dans le cas du gaz parfait, de rapport $C_p/C_v = \gamma$, et de masse molaire M_0 , on obtient

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M_0}}.$$

Pour l'air, on a $\gamma = 1,4$, $R = 8.32 \text{ J} \cdot \text{mol} \cdot \text{K}^{-1}$, $M_0 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$. A 300K, on obtient

$$v_{\text{son}} = 347 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Vitesse du son pour différents gaz à $T = 0^\circ\text{C}$

O ₂	air	N ₂	H ₂
317 m/s	331 m/s	339 m/s	1270 m/s

Dans les liquides et solides, la vitesse du son est bien plus importante

eau	mercure	plomb	cuivre	fer	granit
1500 m/s	1450 m/s	1230 m/s	3750 m/s	5130 m/s	6000 m/s

Fréquences et longueurs d'onde des ondes sonores

Oreille humaine : 20 Hz \rightarrow 20 kHz. Au-delà de 20 kHz, on parle d'ultrasons. En dessous de 20 Hz, on parle d'infrasons.

Chien / chat : jusqu'à 60 kHz.

Dauphin / chauve-souris : jusqu'à 500 kHz.

Eléphant : infrasons.

Les longueurs d'ondes

$$\lambda_{20\text{Hz}} = \frac{v}{f} = 100\text{m},$$

$$\lambda_{20\text{kHz}} = 10\text{cm}.$$

L'intensité acoustique

Elle se mesure en W/m^2 ou bien on mesure au sonomètre une pression en Pascal (N/m^2). On utilise fréquemment les décibels (dB) définies comme suit

$$I_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{p}{p_0} \right),$$

V. Propriétés des ondes

avec

$$I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2 \text{ et } p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa.}$$

L'oreille est un récepteur logarithmique avec une gamme dynamique allant de I_0 à $10^{13} I_0$.

Exemple de niveaux d'intensité acoustique

Dans une bibliothèque on a un niveau acoustique de typiquement 50 dB contre environ 130 dB pour un avion au décollage.

Remarque : une onde acoustique est une onde **scalaire**, et **longitudinale**.

Compléments au chapitre *Propriétés des ondes*

1. Impédances

Une onde décrit de manière générale deux grandeurs physiques couplées. Le flux d'énergie est une fonction du produit de ces deux variables couplées. Une de ces deux variables est de type "position" et l'autre est une dérivée temporelle (de type "vitesse"). Ces deux variables sont reliées entre elles par une impédance Z . L'impédance intervient alors dans le vecteur densité de courant d'énergie. Pour toute onde, on a une densité d'énergie volumique u et un vecteur densité de courant d'énergie $\vec{\Pi}$ reliés par l'équation locale de conservation de l'énergie

$$\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Exemple d'impédance : pour une onde électromagnétique progressive, on a $E = n \frac{B}{c}$, et les variables couplées sont \vec{E} et $\frac{\vec{B}}{c}$. L'impédance Z se résume donc à l'indice du milieu considéré $Z = n$.

Type d'onde	Grandeurs couplées	vitesse	impédance	$\vec{\Pi}$
OEM	$\vec{E}; \frac{\vec{B}}{c}$	$v = \frac{c}{n}$	$Z = n$	$Z \epsilon_0 c E^2$
Corde vibrante	$y; T \sin \alpha$	$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$	$Z = \sqrt{T \mu}$	$Z \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$
Onde acoustique	$u; \rho$	$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$	$Z = \rho v = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}$	$Z \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$
Câble coaxial	$U; I$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$	$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Z I^2$

2. Réflexion et transmission

Lorsque l'on excite un milieu (ex. force sur une corde), l'onde se propage. Cette propagation est caractérisée par une impédance Z (**propre au milieu de propagation**). C'est l'onde qui propage et transporte l'énergie (et non son milieu de propagation). Selon le milieu (corde fixe ou lourde), donc son impédance, l'excitateur appliquera une force plus ou moins grande. Si le milieu change d'impédance (ex. changement de matière pour le milieu de propagation) la propagation d'énergie ne se fera plus de la même façon. À une interface entre deux milieux d'impédances différentes, une partie de l'énergie seulement est transmise, l'autre partie est réfléchi. Il s'agit d'une situation semblable (généralisation) au cas d'une onde électromagnétique sur un dioptre entre deux milieux. On montre que les coefficients de réflexion r et transmission t en amplitude sont

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

On comprend ainsi l'importance de la notion d'impédance : elle permet de calculer les coefficients de réflexion r et transmission t . En jouant sur l'impédance d'un milieu, on peut également limiter les réflexions (si $Z_1 \sim Z_2, r \sim 0$) : on parle d'**adaptation d'impédance** (ex. : utilisation d'un gel pendant une échographie).

Soit u la perturbation (\vec{E}, y, p, I), on a alors

$$u_{\text{refl.}} = r u_{\text{incident}} ; u_{\text{trans.}} = t u_{\text{incident}}.$$

Mais attention, r et t sont des coefficients en **amplitude**. Du point de vu énergétique

$$\Pi \propto Z u^2,$$

alors $\Pi_{\text{incident}} \propto Z_1 u_{\text{incident}}^2, \Pi_{\text{refl.}} \propto Z_1 u_{\text{refl.}}^2$ et $\Pi_{\text{trans.}} \propto Z_2 u_{\text{trans.}}^2$.

V. Propriétés des ondes

De plus,

$$Z_1 u_{\text{refl.}}^2 = Z_1 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 u_{\text{incident}}^2,$$

$$Z_2 u_{\text{trans.}}^2 = \frac{4Z_1^2}{(Z_1 + Z_2)^2} u_{\text{incident}}^2,$$

donc

$$Z_1 u_{\text{refl.}}^2 + Z_2 u_{\text{trans.}}^2 = Z_1 u_{\text{incident}}^2 \left(\frac{4Z_1 Z_2 + (Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right) = Z_1 u_{\text{incident}}^2.$$

On a donc **conservation de l'énergie**.



FIG. V.3. Pavillon acoustique (Musée Baud, Suisse) permettant de propager au mieux la transmission du son, par adaptation progressive d'impédance. Source : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Baud_museum_mg_8568.jpg.

Exemples :

Cas où $Z_1 = Z_2$

Alors $R = 0$ et $T = 1$: il n'y a pas de réflexion, toute l'intensité est transmise. Le cas $Z_1 = Z_2$ correspond à la situation triviale où l'on est dans le même milieu mais pas seulement. On peut par exemple avoir $\sqrt{T_1 \mu_1} = \sqrt{T_2 \mu_2}$ sur une corde. Mais dans ce cas, les vitesses des deux milieux sont forcément différentes

$$\sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}} \neq \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}}.$$

Adaptation progressive de l'impédance

C'est par exemple le pavillon acoustique (Fig. V.3).



FIG. V.4. Un miroir est un système d'impédance infinie pour la propagation des ondes électromagnétiques. Source : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mirror.jpg>.

Cas où $Z_2 = +\infty$

Alors on a $r_{12} = -1$ et $t_{12} = 0$. On a une réflexion totale au point de séparation. L'onde incidente se superpose à l'onde réfléchie : la grandeur propagée s'annule à la surface de séparation ($r_{12} = -1$). On parle d'*extrémité fermée*. Par exemple, c'est le cas d'un miroir pour les ondes électromagnétiques.

Cas où $Z_2 = 0$

Alors le milieu 2 réfléchit également intégralement l'onde, car $\Pi_t \propto Z_2 = 0$. Mais les amplitudes à l'interfaces sont nulles : $r = +1$ mais $t = 2$. C'est une extrémité ouverte. C'est le cas d'une flûte dans le contexte des ondes acoustiques.

Cas d'une impédance dite "adaptée"

Si on ferme sur une impédance "adaptée" $Z_c = Z_1$, on absorbe l'onde sans la réfléchir. Cela introduit la notion d'adaptation d'impédance pour maximiser la transmission d'énergie d'un milieu à l'autre (ex. pavillon acoustique d'un instrument de musique).

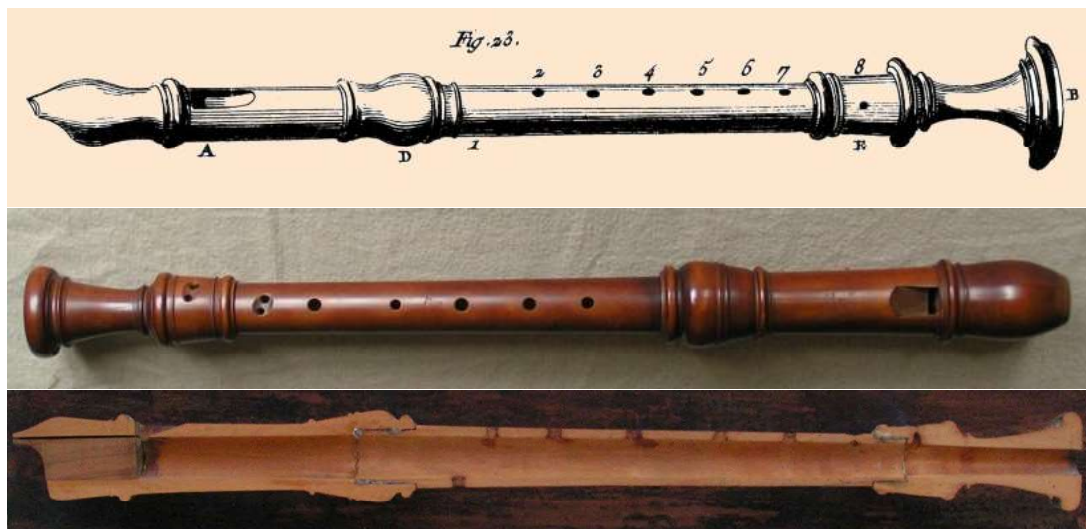


FIG. V.5. La flûte à bec peut être vue comme un tuyau sonore à extrémité ouverte, dans lequel on excite des ondes sonores. Source des images : <http://www.flute-a-bec.com>.

V. Propriétés des ondes

Chapitre VI

Optique géométrique

L'optique géométrique est l'étude de la propagation des rayons lumineux à travers les milieux transparents ou parfaitement réfléchissants, ainsi que la formation des images. Son domaine d'application est essentiellement les instruments d'optique dès lors que les dimensions caractéristiques sont grandes devant la longueur d'onde λ : *on néglige l'aspect ondulatoire de la lumière*. On considère la lumière comme un ensemble de "rayons lumineux" se propageant en ligne droite. Cela correspond à la limite $\lambda \rightarrow 0$. On néglige également le caractère vectoriel de l'onde électromagnétique. **Les rayons lumineux sont les lignes de champ du vecteur de Poynting**. En optique géométrique, on ne considère que les rayons, la topographie du champ électromagnétique, et non plus l'onde elle-même. On négligera donc par la suite tous les phénomènes d'interférences et de diffraction.

1. Propriétés des rayons lumineux

1.1. Notion de chemin optique

L'interaction entre la lumière et la matière est résumée dans la notion d'indice optique $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Soit s l'abscisse curviligne sur un rayon lumineux de chemin dans l'espace \mathcal{C} reliant deux points A et B. On définit $L[AB]$ le *chemin optique* associé au rayon allant de A à B selon \mathcal{C} par

$$L[AB] = \int_{\mathcal{C}} n(\vec{r}) ds.$$

Dans un milieu homogène, si on note l la longueur du chemin AB, on a alors simplement

$$L[AB] = nl.$$

1.2. Principe de Fermat

Le chemin optique associé au trajet de la lumière entre deux points A et B de l'espace est extrémal. Plusieurs chemins permettent de rejoindre A à B (une infinité). Celui qui rend le chemin optique extrémal correspond alors au chemin suivi par la lumière. En pratique, c'est le chemin optique minimal.

Cas d'un milieu homogène

Si le milieu est homogène, la lumière se propage en ligne droite. Donc un milieu homogène ne modifie pas les surfaces d'onde.

Alternance de milieux homogènes

Il peut exister plusieurs chemins allant de A à B minimisant le chemin optique. C'est le principe de la formation des images dans les instruments d'optique.

1.3. Notion de système optique

Un système optique est un ensemble de **dioptries** (interfaces entre deux milieux d'indices différents) modifiant les surfaces d'onde incidentes et par conséquent le chemin optique suivi par la lumière (*i.e.* les directions des rayons lumineux). Un système optique sera dit centré s'il est constitué d'un ensemble de dioptries à symétrie cylindrique possédant un axe de symétrie commun.

VI. Optique géométrique

Définition : stigmatisme

Un système optique Σ sera dit **stigmatique** si à un point source A d'où émerge des rayons, il fait correspondre un seul point image A' où converge tous les rayons sortant de Σ .

Alors on dit que A et A' sont **conjugués** par le système optique Σ : A' est l'**image** de l'**objet** A.

Principe du retour inverse de la lumière

Si un chemin optique de $A \rightarrow B$ est extrémal, il l'est également de $B \rightarrow A$. Le chemin suivi par les rayons lumineux est indépendant du sens de propagation. Donc **A est l'image de A' par retour inverse de la lumière**.

Stigmatisme rigoureux

Un système optique est dit stigmatique rigoureusement si le stigmatisme entre deux points conjugués est vérifié pour tous les rayons lumineux issus du point objet. Il existe très peu de systèmes optiques qui sont rigoureusement stigmatiques, c'est le cas du miroir plan par exemple.

Remarque : si le système est stigmatique, deux rayons lumineux suffisent pour déterminer la position de l'image.

Réel/virtuel

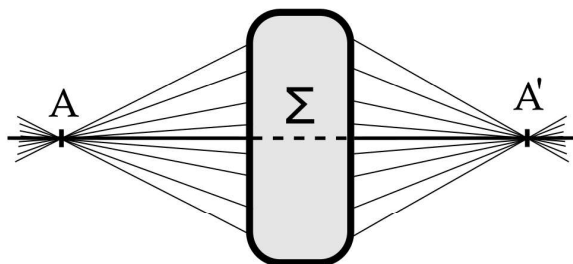
Soit A un point objet. Si tous les rayons lumineux émergent réellement de A, et que les rayons arrivent sur le système optique en divergeant, on dit que l'objet A est **réel**. Si tous les rayons lumineux émergent virtuellement de A, et que les rayons arrivent sur le système optique en convergeant, on dit que l'objet A est **virtuel**.

Soit A' un point image. Si tous les rayons lumineux convergent réellement en A', et que les rayons émergent du système optique en convergeant, on dit que l'image A' est **réelle**. Si les rayons lumineux convergent virtuellement en A', et que les rayons émergent du système optique en divergeant, on dit que l'image A' est **virtuelle**.

Stigmatisme approché

Dans le cas le plus courant, un objet ponctuel A a pour image une "tâche", correspondant à la zone de recouvrement des rayons lumineux. On parle de stigmatisme approché (Fig. VI.1). Dans le cas des systèmes où la zone de recouvrement est suffisamment petite par rapport à la taille du capteur (pixel, cellule de la rétine,...), le stigmatisme approché permet d'obtenir des images "nettes".

a) *Stigmatisme rigoureux*



b) *Stigmatisme approché*

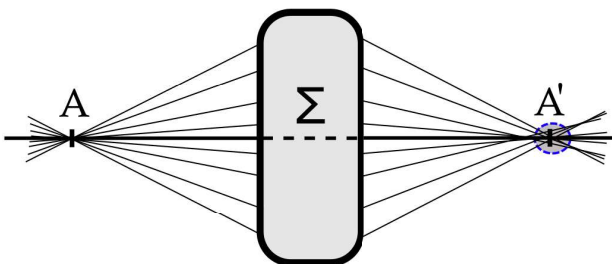


FIG. VI.1. Illustration du stigmatisme rigoureux (a) et approché (b) par un système optique Σ , entre deux points conjugués A et A'.

Il existe un critère expérimental permettant de rendre un système optique plus stigmatique, ce sont les **conditions de Gauss**.

Conditions de Gauss

- rayons faiblement inclinés;
- rayons peu écartés de l'axe optique (paraxiaux).

Notion d'aplanétisme

Un système optique Σ est aplanétique si à tout objet plan il forme une image plane.

Relations de conjugaison

Une relation de conjugaison est une relation mathématique reliant la position de l'objet et la position de l'image, en pratique à l'aide de mesures algébriques. Pour cela, on oriente le système optique et les angles. Une mesure algébrique est une distance comptée positivement si le segment est orienté dans le sens positif et négativement sinon.

2. Relations de conjugaison de systèmes optiques simples

2.1. Cas du miroir plan

Soit H le projeté orthogonal de A sur le miroir (Fig. VI.2). Alors A' est le symétrique de A donc

$$\overline{AH} = -\overline{A'H}$$

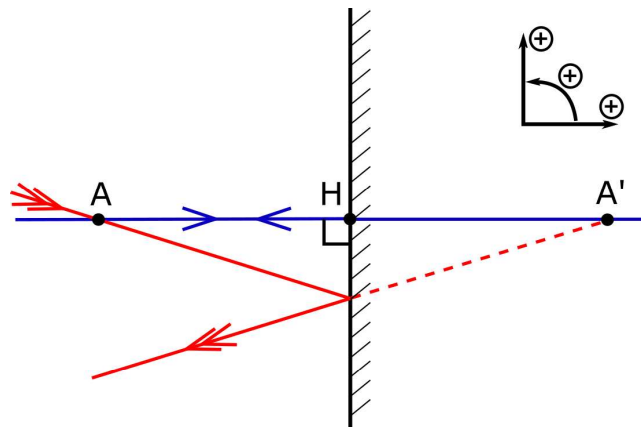


FIG. VI.2. Relation de conjugaison d'un miroir plan. L'objet A est réel, l'image A' est virtuelle.

2.2. Cas du dioptre plan

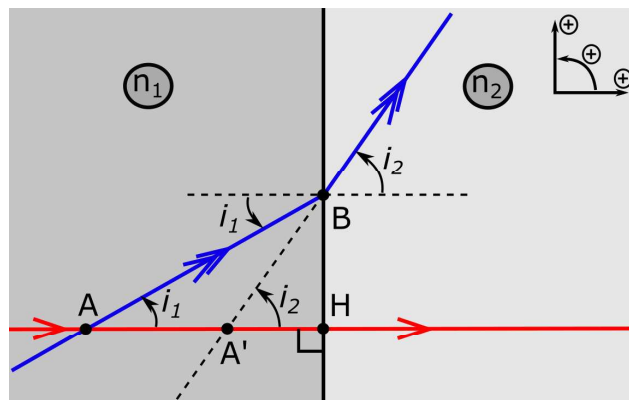


FIG. VI.3. Relation de conjugaison d'un dioptre plan. L'objet A est réel, l'image A' est virtuelle.

VI. Optique géométrique

On considère un point objet A conjugué à son image A' par un dioptre plan (Fig. VI.3). Au niveau du dioptre, on a les relations de Descartes

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

Si on considère le triangle AHB, on a

$$\tan i_1 = \frac{\overline{HB}}{\overline{AH}},$$

et dans le triangle A'HB

$$\tan i_2 = \frac{\overline{HB}}{\overline{A'H}}.$$

On se place dans les conditions de Gauss : $i_1 \ll 1$ et $i_2 \ll 1$, donc

$$\tan i_{1,2} \approx \sin i_{1,2} \approx i_{1,2},$$

soit

$$n_1 \frac{\overline{HB}}{\overline{AH}} = n_2 \frac{\overline{HB}}{\overline{A'H}}.$$

D'où les relations de conjugaison du dioptre plan

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{AH}} = \frac{n_2}{\overline{A'H}}}.$$

2.3. Cas du dioptre sphérique

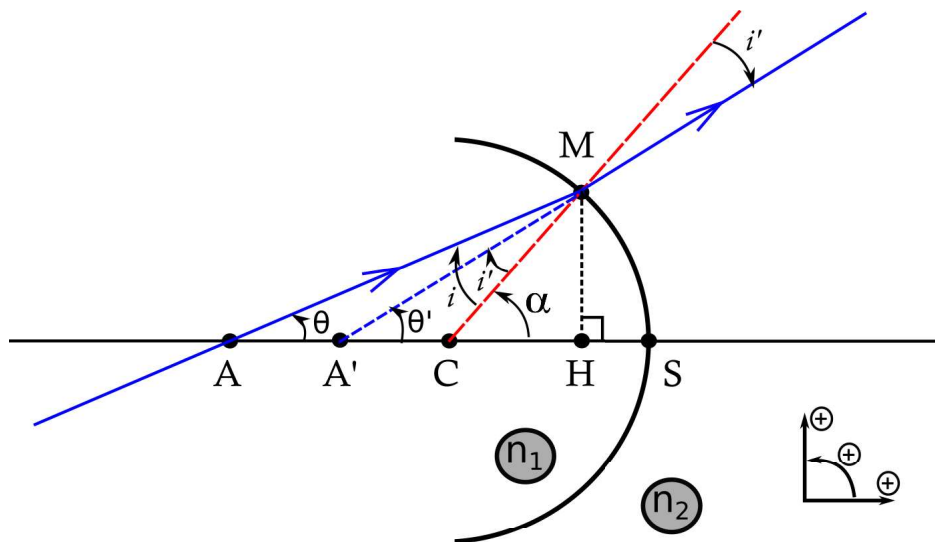


FIG. VI.4. Relation de conjugaison d'un dioptre sphérique. L'objet A est réel, l'image A' est virtuelle.

On considère un point objet A conjugué à son image A' par un dioptre sphérique (Fig. VI.4). Soit C le centre du cercle délimitant le dioptre sphérique, de sommet S. Si on considère le triangle ACM, on a

$$-i + \theta + (\pi - \alpha) = \pi,$$

donc

$$\boxed{i = -\alpha + \theta}.$$

Dans le triangle A'CM, on a également

$$\boxed{i' = -\alpha + \theta'}.$$

Dans les conditions de Gauss, les angles i et i' sont faibles et donc la loi de Descartes devient

$$n_1 i = n_2 i' \Rightarrow n_1 (-\alpha + \theta) = n_2 (-\alpha + \theta').$$

D'où

$$\alpha = \frac{\overline{HM}}{\overline{CH}} \approx \frac{\overline{SM}}{\overline{CS}}, \quad \theta \approx \frac{\overline{SM}}{\overline{AS}}, \quad \theta' \approx \frac{\overline{SM}}{\overline{A'S}},$$

donc

$$n_1 \left(\frac{\overline{SM}}{\overline{CS}} - \frac{\overline{SM}}{\overline{AS}} \right) = n_2 \left(\frac{\overline{SM}}{\overline{CS}} - \frac{\overline{SM}}{\overline{A'S}} \right).$$

D'où la relation de conjugaison

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}}. \quad (\text{VI.1})$$

Notion de foyer

Le foyer image F' est l'image d'un objet A situé à $-\infty$ (faisceau incident collimaté).

Le foyer objet F est l'objet tel que l'image conjuguée soit renvoyée à $+\infty$.

Pour le dioptré sphérique, en imposant $A \rightarrow -\infty$ dans la relation de conjugaison, on obtient

$$-\frac{n_2}{\overline{SF'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}},$$

et en imposant $A' \rightarrow +\infty$

$$\frac{n_1}{\overline{SF}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}.$$

On obtient ainsi une relation entre les foyers F et F' suivant

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{SF}} + \frac{n_2}{\overline{SF'}} = 0}.$$

2.4. La lentille mince

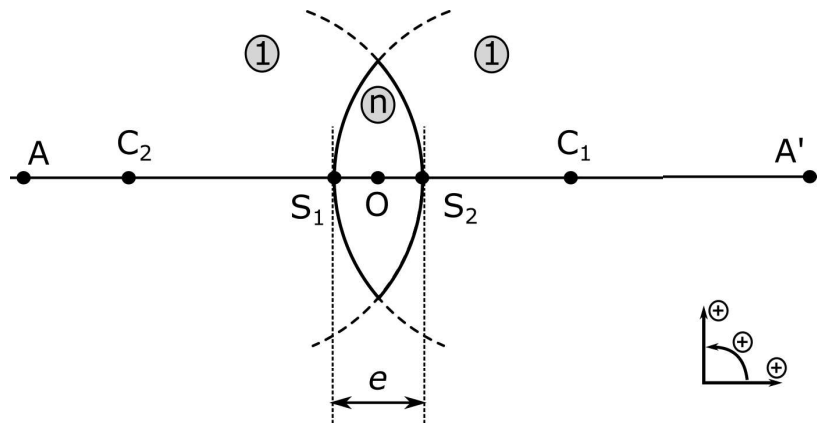


FIG. VI.5. Lentille mince formée d'un matériau d'indice n comme association de deux dioptrés sphériques. L'épaisseur de la lentille est $e = S_1 S_2$.

Une lentille mince est, dans sa version la plus simple, l'association de deux dioptrés sphériques. Le premier dioptré conjugué à l'objet A une image intermédiaire A_1 , elle-même conjuguée par le deuxième dioptré à l'image A'

$$A \xrightarrow{\text{dioptré 1}} A_1 \xrightarrow{\text{dioptré 2}} A'.$$

VI. Optique géométrique

On a alors

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} - \frac{n}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1-n}{\overline{S_1C_1}},$$

$$\frac{n}{\overline{S_2A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{n-1}{\overline{S_2C_2}}.$$

La lentille sera considérée comme **mince** si et seulement si

$$|\overline{S_1S_2}| \ll |\overline{C_1C_2}|,$$

donc

$$S_1 \approx S_2 = O.$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{n}{\overline{OA_1}} = \frac{1-n}{\overline{OC_1}}, \quad \text{et} \quad \frac{n}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = -\frac{1-n}{\overline{OC_2}}.$$

D'où

$$\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = (n-1) \left(\frac{1}{\overline{OC_2}} - \frac{1}{\overline{OC_1}} \right).$$

À partir de la définition des foyers F et F', on a

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1) \left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}} \right), \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OF'}} = -\frac{1}{\overline{OF}},$$

donc

$$\overline{OF} = -\overline{OF'}.$$

En utilisant le foyer image F', on obtient la relation de conjugaison de la lentille mince

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}.$$

Si $\overline{OF'} > 0$, la lentille est *convergente*, si $\overline{OF'} < 0$, la lentille est *divergente*.

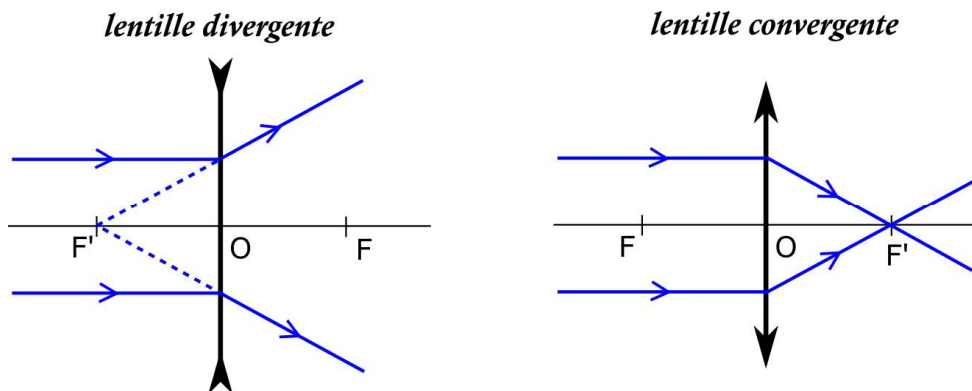


FIG. VI.6. Lentilles divergentes et convergentes - notations symboliques.

On appelle $f' = \overline{OF'}$ la **distance focale de la lentille**, et on note $f = \overline{OF}$. On exprime parfois la relation de conjugaison sous la forme réduite

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}.$$

Propriétés fondamentales des lentilles minces

- les rayons passant par O ne sont pas déviés ;
- un rayon incident parallèle à l'axe optique est dévié en passant (y compris virtuellement) par le foyer image F' ;
- un rayon incident passant (y compris virtuellement) par le foyer objet F émerge parallèlement à l'axe optique.

Ces trois rayons remarquables permettent de tracer des trajectoires de rayons lumineux. De plus, tout faisceau de lumière parallèle (ou faisceau *collimaté*) converge en un point noté Φ' , *un foyer image secondaire*, situé dans le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par le foyer image F'. Ce plan est appelé le *plan focal image*. De manière analogue, on définit le *plan focal objet* comme le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par le foyer objet F. Tout point de ce plan, noté Φ , est *un foyer objet secondaire*. Tous les rayons lumineux issus de Φ émergeront parallèles les uns par rapport aux autres après le système optique Σ .

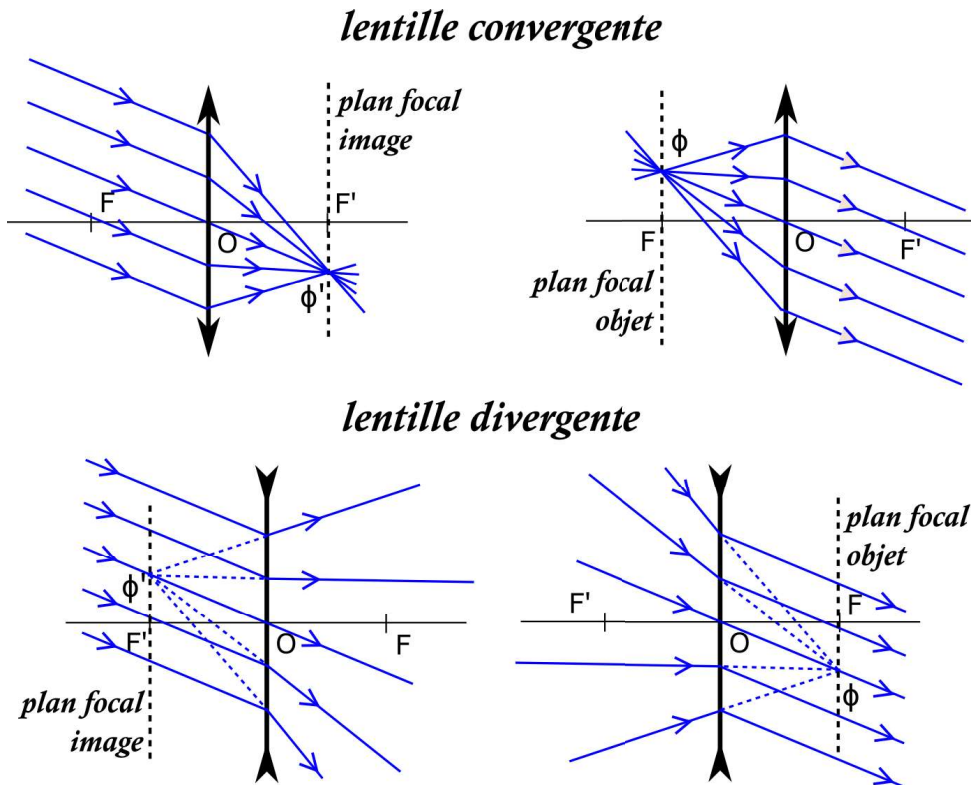


FIG. VI.7. Lentilles divergentes et convergentes - définition des foyers secondaires.

On démontre également (admis) la relation de conjugaison aux foyers

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2.$$

2.5. Construction géométrique dans le cas d'une lentille convergente

Le système { lentille mince } est stigmatique : il suffit de tracer deux rayons passant par l'objet A pour déterminer la position de l'image A'. On utilise les rayons remarquables suivants

- le rayon passant par l'origine O de la lentille n'est pas dévié ;
- le rayon parallèle à l'axe optique est dévié telle que sa direction après la lentille passe par F', le foyer objet ;
- le rayon passant par le foyer objet F émerge parallèlement à l'axe optique.

Soit un objet \overline{AB} avec A appartenant à l'axe optique et B hors de l'axe optique mais dans le même plan objet. Si le système optique Σ est aplanétique, $\overline{A'B'}$ est dans le plan image. On définit le **grandissement** transversal

VI. Optique géométrique

γ comme

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Le grandissement transversal est défini pour tout système optique Σ aplanétique et stigmatique. Une lentille convergente est caractérisée par sa focale f' . Géométriquement, la construction des rayons lumineux nécessite les points O, F et F'. En appliquant simplement le théorème de Thalès aux triangles ABO et A'B'O, on montre facilement que pour une lentille mince

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

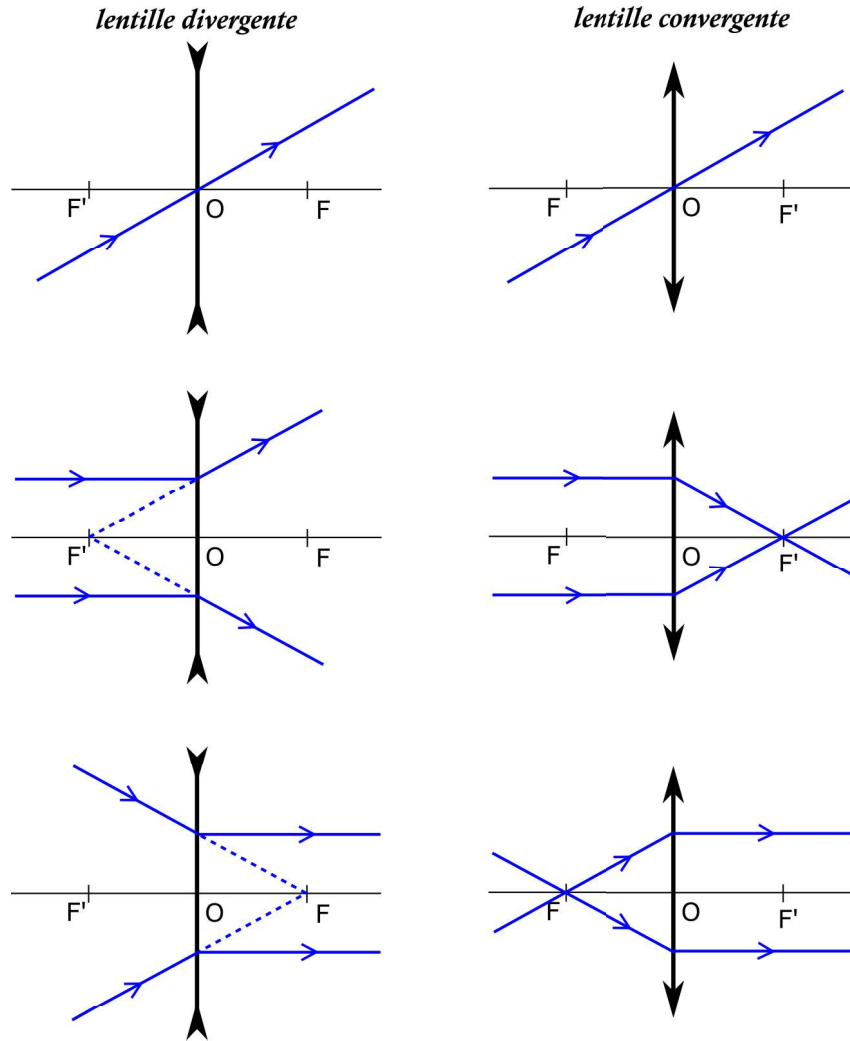


FIG. VI.8. Lentilles divergentes et convergentes - rayons remarquables.

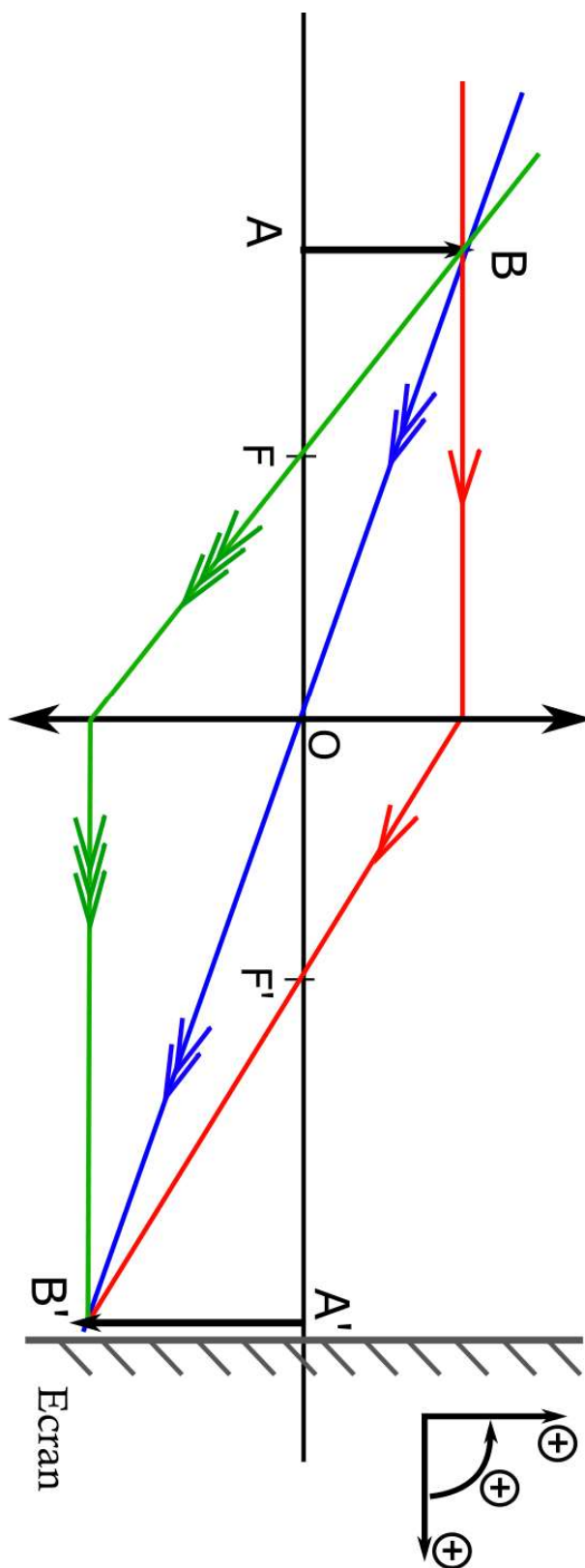


FIG. VI.9. Image d'un objet étendu AB par une lentille mince convergente.

VI. Optique géométrique

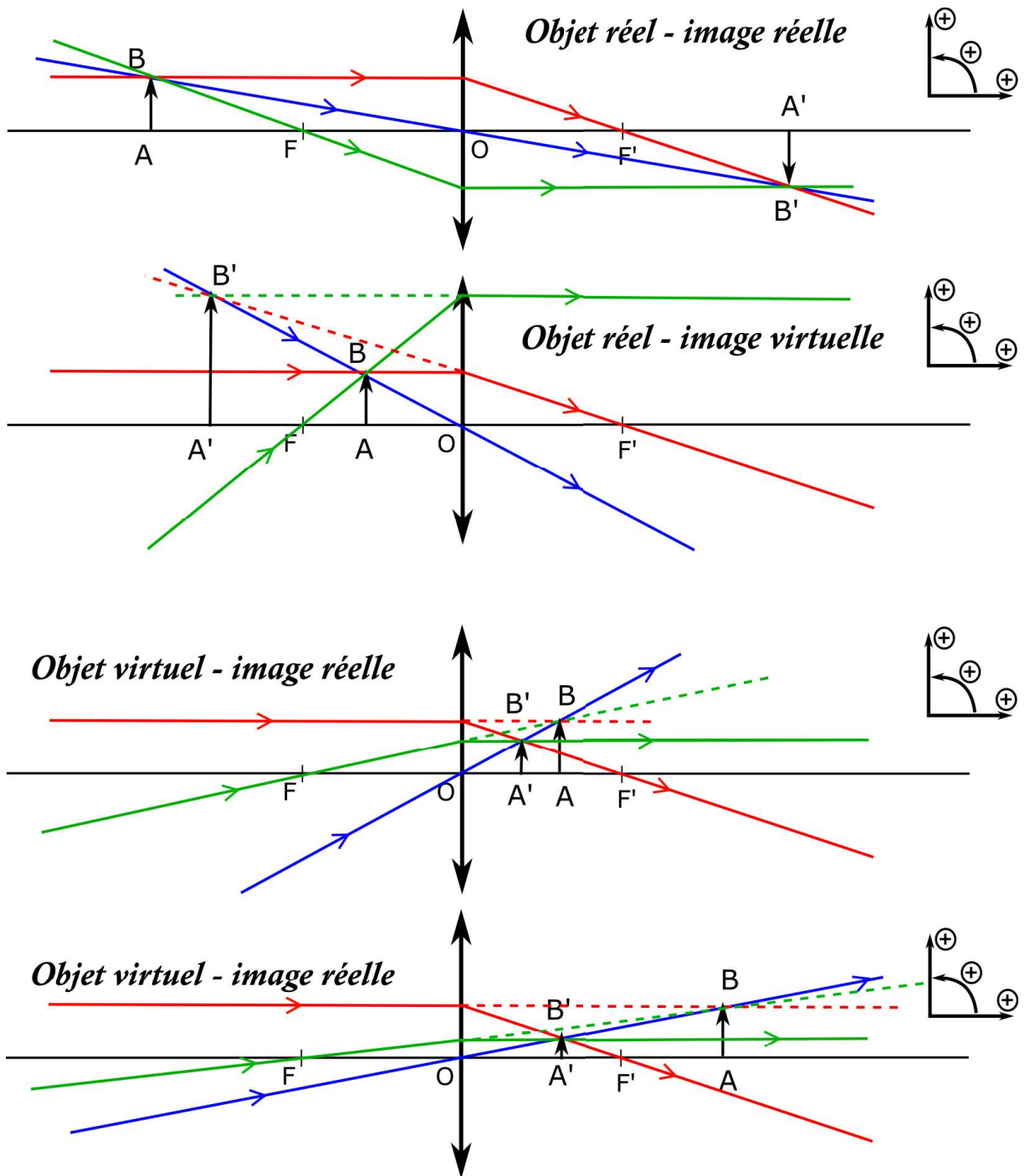


FIG. VI.10. Construction géométrique dans le cas d'une lentille convergente.

2.6. Construction géométrique dans le cas d'une lentille divergente

Le principe est le même qu'une lentille convergente, mais le foyer image F' est situé en $]-\infty; O[$ alors que le foyer objet F est situé sur $]O; +\infty[$.

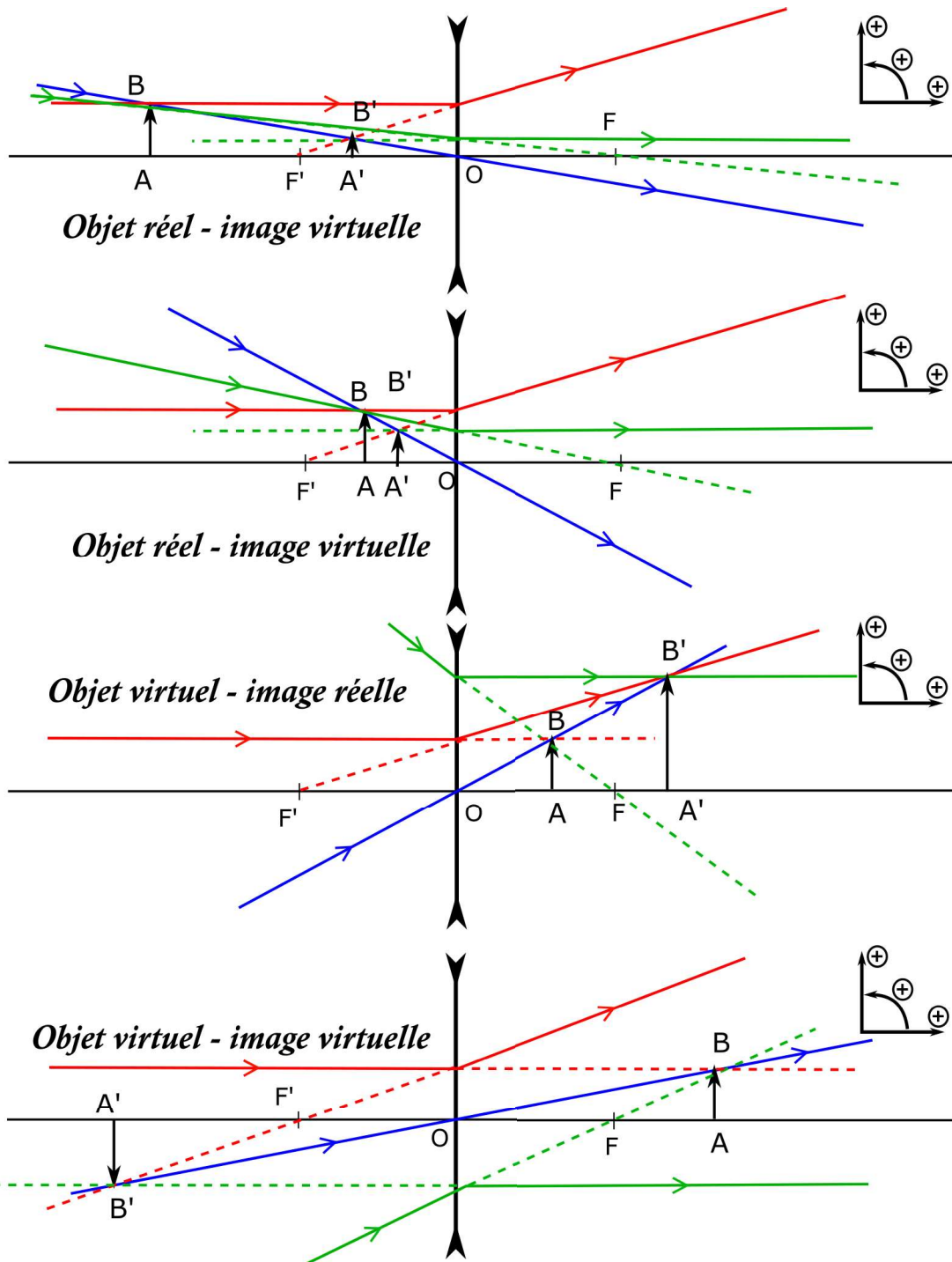


FIG. VI.11. Construction géométrique dans le cas d'une lentille divergente.

VI. Optique géométrique

3. Instruments d'optiques

3.1. Détermination de la focale d'une lentille

Autocollimation

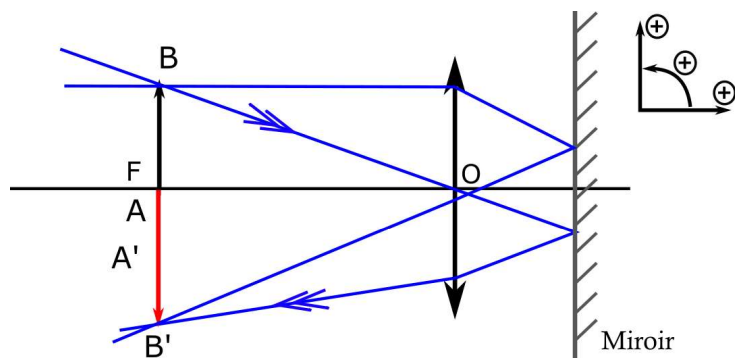


FIG. VI.12. Méthode d'autocollimation.

Si une source éclaire un objet, l'objet sera au foyer objet d'une lentille si l'image formée par la réflexion dans le miroir est nette sur l'objet même (voir Fig. VI.12). L'image est renversée.

Méthode de conjugaison

Application de la relation de conjugaison : on mesure la position de l'image et de l'objet et on en déduit la focale par application de la relation de conjugaison.

Méthode de Silbermann et Bessel

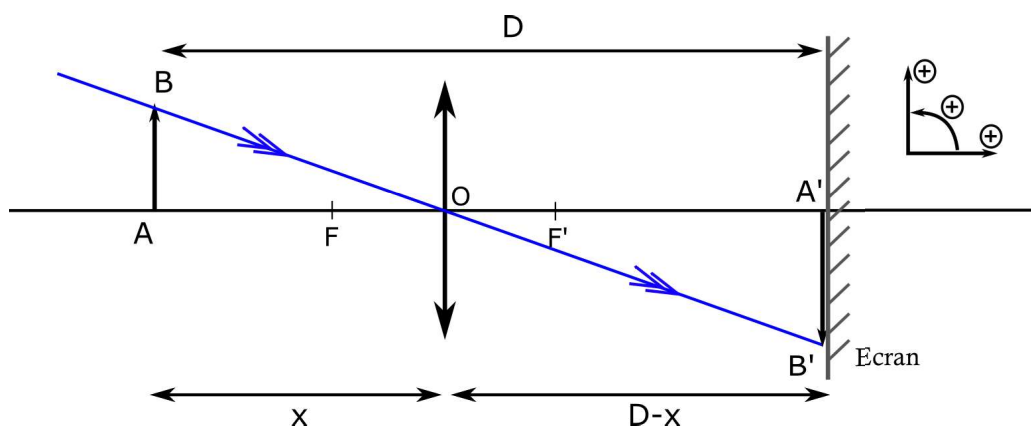


FIG. VI.13. Méthode de Bessel.

On forme l'image d'un objet AB sur un écran à une distance D . Il existe deux positions de la lentille (à D fixé) pour former l'image.

Relations de conjugaison

On a

$$\frac{1}{D-x} - \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{D}{x(D-x)} = \frac{1}{f'}$$

$$\Leftrightarrow f'D = -x^2 + xD,$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - xD + f'D = 0}.$$

Cette équation a deux solutions

$$\boxed{x_1 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4f'D}}{2}, \quad x_2 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4f'D}}{2}}, \text{ et } x_1 + x_2 = D.$$

Ces solutions sont réelles si et seulement si

$$\boxed{D > 4f'}.$$

La méthode de Silbermann consiste à mesurer expérimentalement x_1 et x_2 pour plusieurs valeurs de D et en déduire par un ajustement f' . La méthode de Bessel consiste à réaliser le cas limite où l'on a une seule solution. Dans ce cas, le grandissement est exactement de $\gamma = -1$ et

$$\boxed{D = 4f'}.$$

Si $D < 4f'$, il n'y a pas de solution, l'image est floue. Si $D = 4f'$, alors $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{D}{2}$. La lentille est exactement au milieu, entre objet et écran. Alors la focale vaut $f' = D/4$.

3.2. La loupe

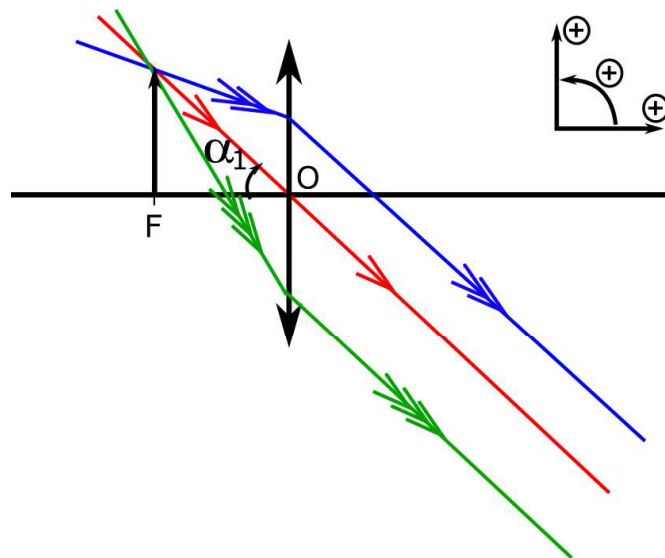


FIG. VI.14. Principe de la loupe.

La loupe est une lentille convergente. Elle forme l'image d'un objet donné à l'infini. Si l'image est à l'infini, **l'œil n'accomode pas** (accomoder signifie une contraction de cristallin pour "adapter" la focale de l'œil et former une image nette). Pour cela, il faut placer l'objet au plan focal objet de la loupe (Fig. VI.14).

À l'infini, la taille apparente de l'objet est sa taille **angulaire** correspondant à l'angle α_1 de la Fig. VI.14. On a

$$\alpha_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{OF}},$$

l'angle apparent pour un objet AB vu à travers la loupe. Plus la focale sera petite, plus l'angle apparent sera grand. On quantifie l'apport de l'instrument d'optique par rapport à l'œil seul. L'angle apparent maximal sous lequel un œil nu peut voir l'objet est lorsque l'objet est le plus près possible de l'œil. La distance minimale

VI. Optique géométrique

objet-œil permettant de former une image nette (l'**accommodation**) est le *ponctum-proximum* d_{pp} . Pour un œil "normal", $d_{pp} = 25\text{cm}$. L'angle apparent est alors

$$\alpha_{pp} = \frac{\overline{AB}}{d_{pp}}.$$

Le gain angulaire de la loupe est quantifié par le **grossissement commercial**

$$G_c = \frac{\alpha_1}{\alpha_{pp}}.$$

Dans le cas d'une loupe, on a un grossissement

$$G_c = \frac{d_{pp}}{f'}.$$

Plus la focale sera petite, plus l'objet sera "gros" angulairement. Par exemple, pour $f' = 2,5\text{mm}$, $G_c = 10$: grossissement $\times 10$.

3.3. Le microscope

Cette partie sera traitée en TD.

Un microscope est constitué d'un objectif et d'un oculaire. L'objectif permet de former une image réelle de l'objet avec un fort grossissement. L'oculaire permet d'observer cette image à l'infini avec un fort grossissement. L'image est renvoyée à l'infini et l'œil n'accomode pas. Soit A_1B_1 l'objet intermédiaire

$$AB \xrightarrow{\text{objectif}} A_1B_1 \xrightarrow{\text{oculaire}} A'B'.$$

Le système transforme un objet réel en une image à l'infini. C'est le grossissement du microscope qui va caractériser l'appareil. L'objectif forme une image réelle A_1B_1 avec un grossissement transversal γ_1

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\Delta - f'_2}{\overline{OA}},$$

or

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1},$$

soit

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\Delta - f'_2} - \frac{1}{f'_1} = \frac{f'_1 + f'_2 - \Delta}{f'_1(\Delta - f'_2)},$$

D'où

$$\gamma_1 = \frac{f'_1 + f'_2 - \Delta}{f'_1}.$$

Cette image est observée à travers l'oculaire qui sert de loupe avec un grossissement commercial

$$G_{c,2} = \frac{d_{pp}}{f'_2}.$$

Il permet d'observer l'objet avec un angle θ (attention, $\theta < 0$)

$$\theta = \frac{(f'_1 + f'_2) - \Delta}{f'_1 f'_2} \overline{AB},$$

et l'angle au punctum proximum

$$\alpha_c = \frac{|\overline{AB}|}{d_{pp}}$$

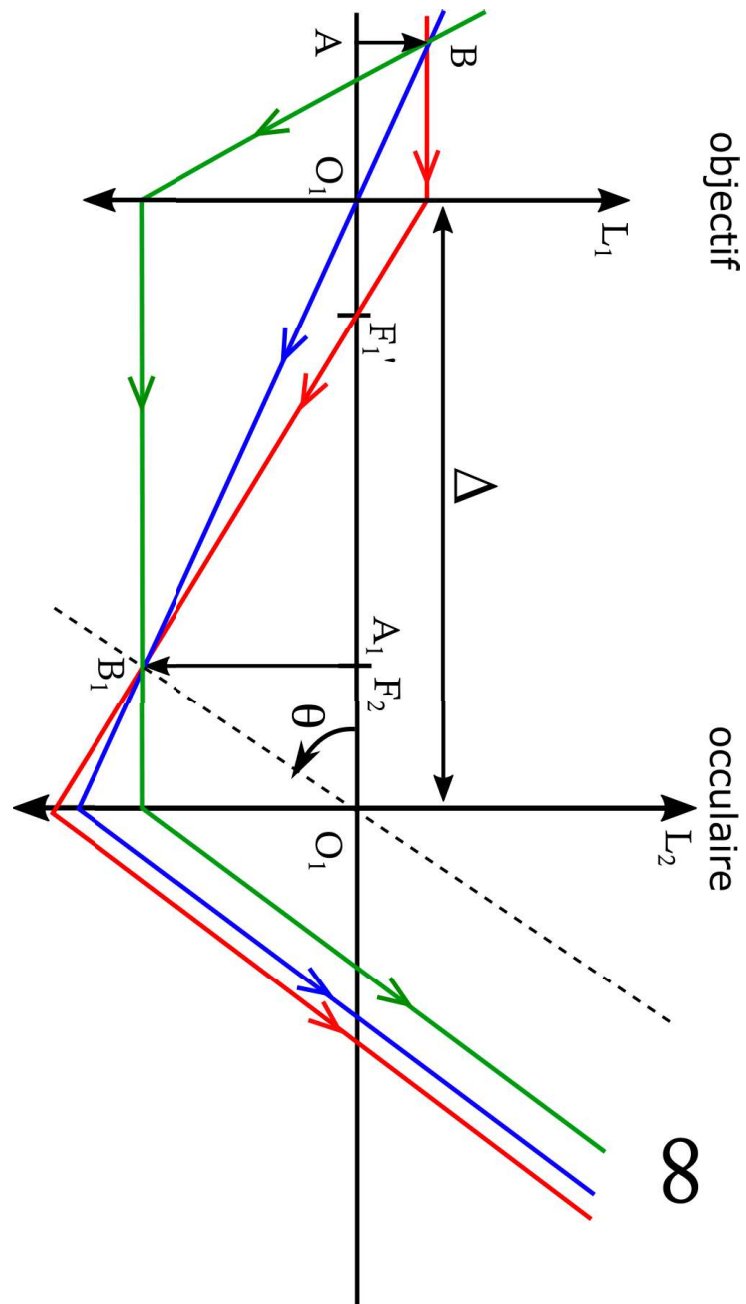


FIG. VI.15. Modélisation d'un microscope.

D'où le grossissement du microscope (commercial)

$$G_{\text{micro},c} = \frac{[(f_1' + f_2') - \Delta] d_{pp}}{f_1' f_2'}$$

VI. Optique géométrique

On retiendra alors que le grossissement commercial du microscope est le produit entre le grandissement de l'objectif et le grossissement commercial de l'oculaire.

$$G_{\text{micro},c} = \gamma G_{c,2}.$$

Valeurs typiques : oculaire $\times 10$, objectif $\times 10$ à $\times 100$ soit un grossissement commercial de $\times 100$. Pour un objet $AB \sim 1\mu\text{m}$, on a

$$\alpha_{pp} = \frac{10^{-6}}{250 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ rad},$$

donc $\alpha_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. Le pouvoir de résolution de l'oeil est de

$$\theta \sim \frac{1^\circ}{60} = 1' \approx 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

Donc avec un objectif $\times 10$ et un oculaire $\times 10$, on peut observer des détails de l'ordre du μm !

3.4. La lunette astronomique

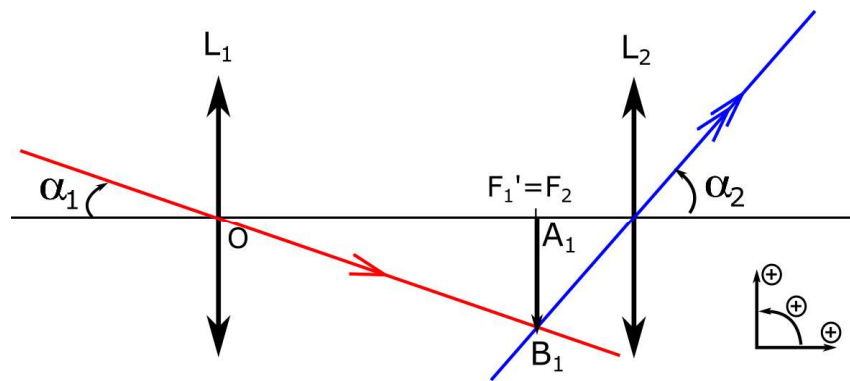


FIG. VI.16. Modélisation d'une lunette astronomique.

Une lunette astronomique permet l'observation d'objets situés à l'infini. Pour que l'oeil n'accorde pas, la lunette renvoie l'image à l'infini. Ainsi, les foyers objet et image sont tous les deux situés à l'infini. On parle de **système optique afocal**. La lunette va permettre d'obtenir de forts grossissements. Comme le microscope, elle est constituée d'un objectif formant une image intermédiaire A_1B_1 . Cette image intermédiaire est observée à travers l'oculaire utilisé comme une loupe, envoyant l'image à l'infini. L'objet est à l'infini. Il n'y a pas de mise au point comme le microscope. La lunette astronomique étant afocale, on a

$$F'_1 \equiv F_2,$$

et donc

$$\Delta = f'_1 + f'_2.$$

Or

$$\alpha_2 = \frac{A_1B_1}{f'_2},$$

et

$$\alpha_1 = \frac{A_1B_1}{f'_1},$$

d'où le grossissement angulaire de l'objet

$$G_{\text{lunette},c} = \frac{f'_1}{f'_2}.$$

Compléments au chapitre *Optique géométrique*

1. Quelques instruments d'optique (Cyclopaedia, 1728)

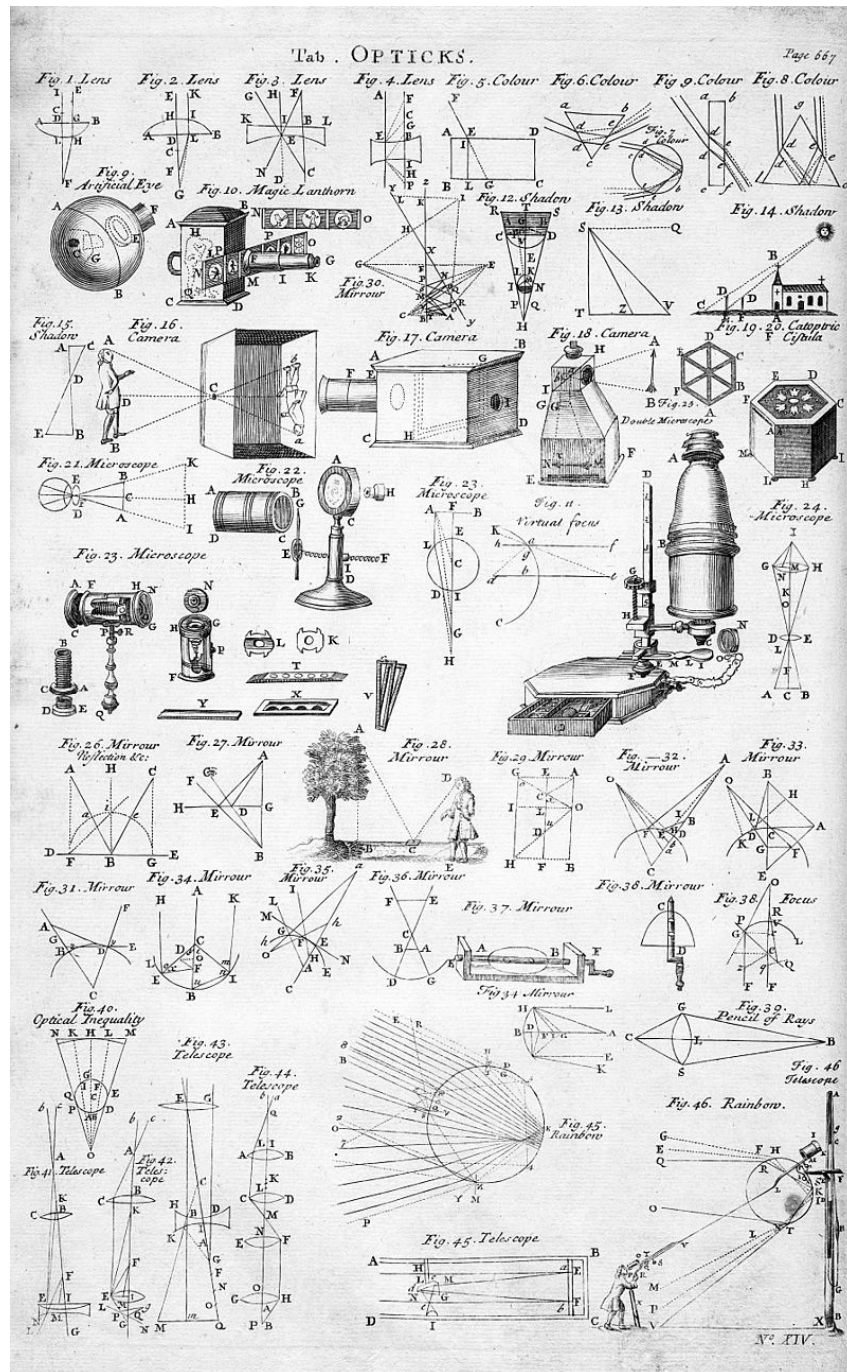


FIG. VI.17. Quelques instruments d'optique (extrait de *Cyclopaedia*, 1728). Source : <https://en.wikipedia.org/wiki/Optics>

2. Lentille de Nimrud

Les plus vieilles lentilles connues étaient réalisées en cristaux polis (souvent du quartz), comme la lentille de Nimrud, remontant à 700 ans avant J.-C (actuellement conservée au British Museum, London).



FIG. VI.18. Lentille de Nimrud, conservée au British Museum (London). Source : <https://en.wikipedia.org/wiki/Optics>

VI. Optique géométrique

Chapitre VII

Interférences et spectroscopie

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la propagation de la lumière dans la limite de l'optique géométrique, où la longueur d'onde est faible devant toutes les tailles caractéristiques du milieu de propagation. Cette approximation (dite *approximation de l'optique géométrique*) a permis le développement des instruments optiques avec une approche purement géométrique, en s'affranchissant à la fois de l'aspect ondulatoire et vectoriel des ondes électromagnétiques. Cependant, cette approche n'est plus valable lorsque qu'un objet de petite taille (de l'ordre de quelques dizaines ou centaines de longueurs d'onde au plus) est sur le chemin de l'onde lors de sa propagation. C'est le phénomène de diffraction, vu en classe de Terminale S.

1. Diffraction des ondes lumineuses

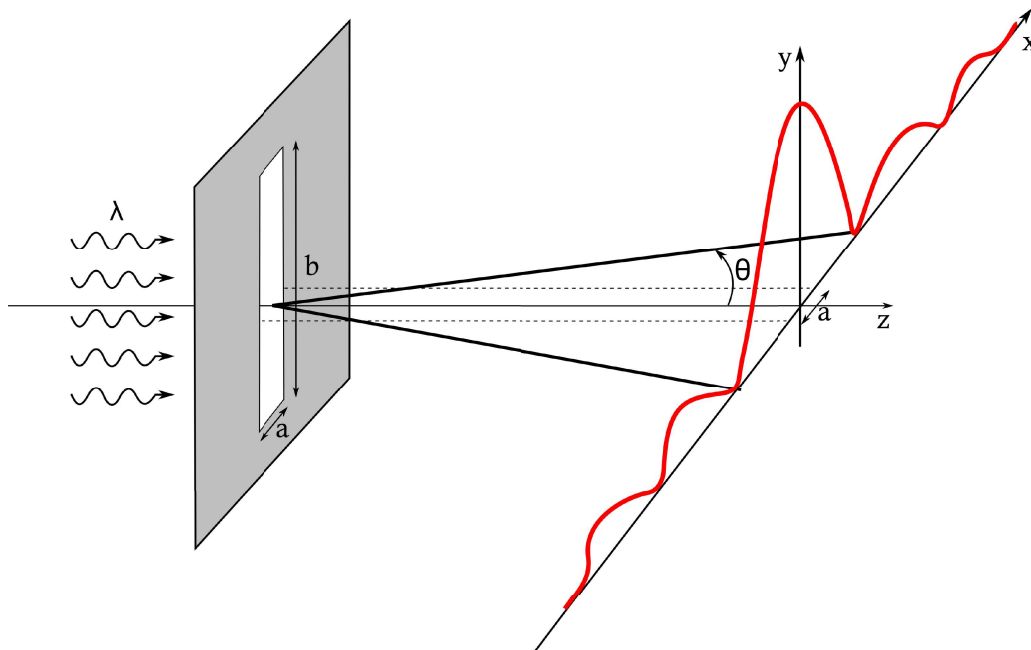


FIG. VII.1. Diffraction par une fente rectangulaire.

Considérons le cas d'une onde plane, incidente sur une fente de largeur a et de longueur b . On observe le profil lumineux sur un écran à une distance D de la fente (voir Fig. VII.1). On observe dans le plan (O, x, y) de l'écran le profil d'intensité $I(x, y)$ de la forme suivante

$$I(x, y) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ax}{\lambda D}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi by}{\lambda D}\right),$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière incidente. La largeur de la tache centrale selon x est de $\Delta x = 2\frac{\lambda D}{a}$, alors que le modèle de l'optique géométrique prévoit une tache de largeur a . Il s'agit du **phénomène de diffraction**, vu en classe de Terminale. Par exemple, pour $\lambda = 638\text{nm}$ (laser He-Ne), $a = 100\mu\text{m}$ (diamètre d'un cheveu) et $D = 2\text{m}$, on obtient une tâche de largeur $\Delta x = 2,5\text{cm}$. Dans le cas d'une ouverture circulaire de rayon r , on

VII. Interférences et spectroscopie

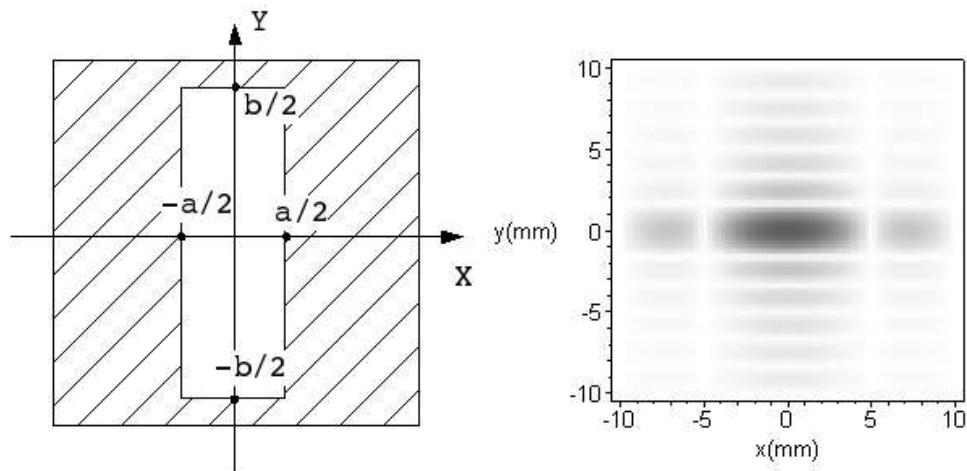


FIG. VII.2. Diffraction par une fente rectangulaire. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_de_la_diffraction.

obtient une *tache d'Airy*. Il s'agit d'une tache à symétrie cylindrique, de diamètre angulaire $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{r}$. Ainsi, pour une observation sur un écran à une distance D , la taille de la tache d'Airy est $\Delta x \approx 1,22 \frac{\lambda D}{r}$ alors que l'optique géométrique prévoit une tache de $2r$.

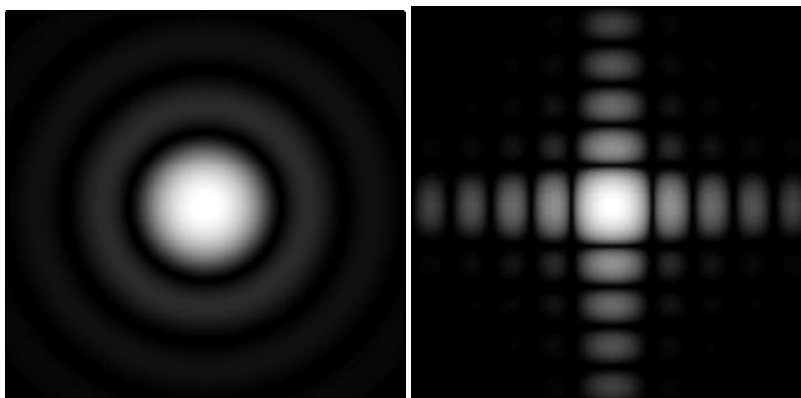


FIG. VII.3. Diffraction par un trou circulaire, par un trou carré. Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Diffraction>.

Le phénomène de diffraction est une conséquence du caractère ondulatoire de la lumière, et ne peut être décrit par le modèle de l'optique géométrique. Un autre phénomène ne peut être décrit par l'optique géométrique et nécessite de tenir compte de l'aspect ondulatoire de la lumière : le **phénomène d'interférences**. Les interférences sont un phénomène propre au caractère ondulatoire d'une grandeur physique. Considérons deux ondes de même nature, d'amplitudes s_1 et s_2 . L'intensité de l'onde (au sens énergétique) est proportionnelle au carré de l'amplitude $I_i(\vec{r}, t) \propto s_i(\vec{r}, t)^2$. L'équation d'onde est linéaire donc l'onde totale issue de la superposition de $s_1(\vec{r}, t)$ et $s_2(\vec{r}, t)$ vaut $s_{\text{tot}}(\vec{r}, t) = s_1(\vec{r}, t) + s_2(\vec{r}, t)$, **mais ce n'est pas vrai pour les intensités**

$$I_{\text{tot}} \neq I_1 + I_2.$$

Ainsi, si $I_{\text{tot}}(\vec{r}, t) \neq I_1(\vec{r}, t) + I_2(\vec{r}, t)$, on parle de **phénomène d'interférences**.

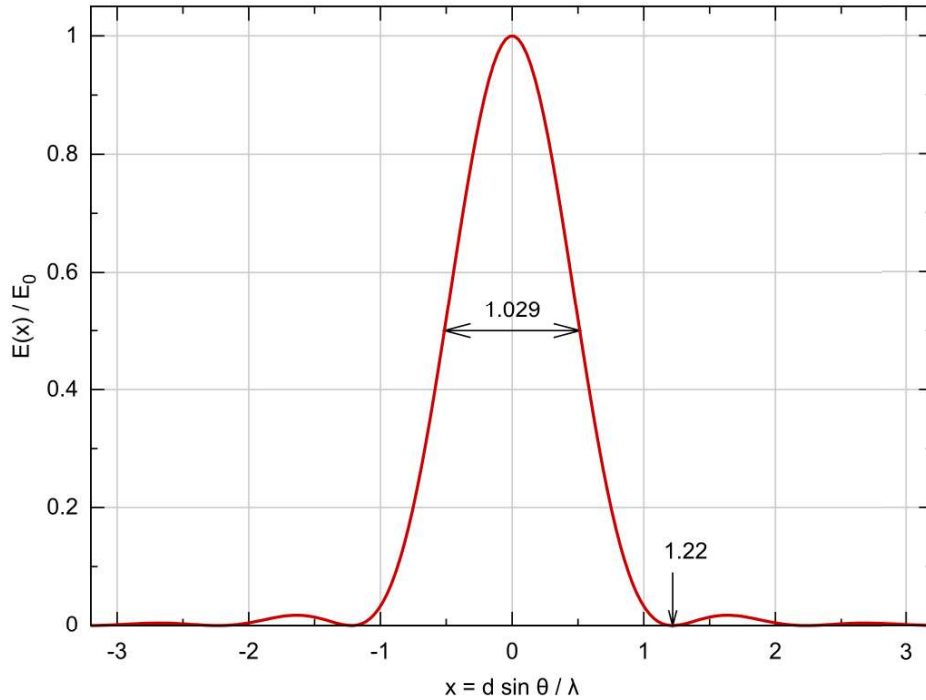


FIG. VII.4. Coupe de l'éclairement en fonction de la position dans une tache d'Airy. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Tache_d'Airy.

2. Interférences entre deux ondes lumineuses

2.1. Définition

L'équation d'onde est linéaire. L'onde résultante de la superposition d'ondes est la somme de ces ondes

$$s_{\text{tot}} = s_1 + s_2 + \dots + s_N.$$

Cependant, la nature ondulatoire ne permet pas de dire la même chose pour l'intensité dans le cas général

$$I_{\text{tot}} \neq I_1 + I_2 + \dots + I_N.$$

Pour les ondes lumineuses, cela se traduit par l'apparition de **franges** d'intensités plus ou moins fortes, bien que chaque sources soient d'éclairement homogène. On peut donc avoir la relation contre-intuitive

"lumière + lumière = obscurité".

On parle alors d'interférences *destructives* (quand les ondes sont en opposition de phase). On peut également avoir $I_{\text{tot}} = 4I_0$! avec $I_1 = I_2 = I_0$. On parle alors d'interférences *constructives* (quand les ondes sont en phase).

2.2. Conditions d'observation des interférences

Cependant, l'observation commune ne permet pas d'obtenir des interférences systématiquement. Deux sources S_1 et S_2 quelconques sans précautions particulières, au contraire, donnent lieu à une superposition des intensités lumineuses. Si la superposition d'intensité se fait linéairement,

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2,$$

VII. Interférences et spectroscopie

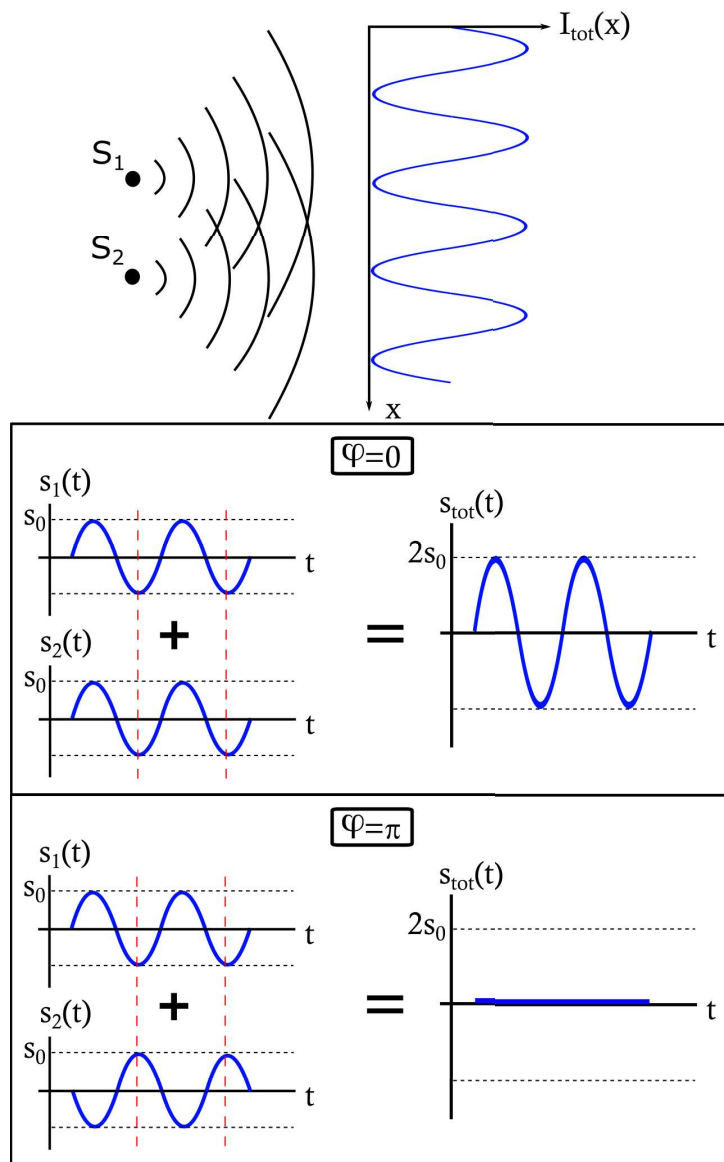


FIG. VII.5. Origine physique du phénomène d'interférences.

il n'y a pas de phénomène d'interférences, bien que les sources soient des ondes lumineuses. On dit alors que les deux sources S_1 et S_2 sont **incohérentes**. Si, en revanche, S_1 et S_2 donnent lieu à des interférences ($I_{\text{tot}} \neq I_1 + I_2$), on dit que les sources S_1 et S_2 sont **cohérentes** entre elles. Le point clé dans le phénomène d'interférence (pour qu'il ait lieu) c'est le **déphasage** φ entre les deux ondes qui se superposent. Si $\varphi = 0$ [π], les interférences sont constructives, si $\varphi = \pi$ [π], les interférences sont destructives. Si la phase $\varphi(t)$ entre les deux ondes est constante dans le temps, on aura des interférences.

Deux ondes sont cohérentes si leur déphasage est stable dans le temps.

Deux ondes cohérentes interfèrent. Ainsi, pour $s_{\text{tot}}(t) = s_1(t) + s_2(t)$, alors

$$s_{\text{tot}}(t)^2 = s_1(t)^2 + s_2(t)^2 + 2s_1(t)s_2(t).$$

Le terme croisé $s_1(t)s_2(t)$ sera non nul en valeur moyenne si le déphasage entre les deux ondes est constant. Si on considère des ondes de la forme

$$s_i(t) = \sqrt{2I_i} \cos(\omega t + \phi_i(t)),$$

alors

$$I_{\text{tot}}(t) = 2I_1 \langle \cos^2(\omega t + \phi_1(t)) \rangle + 2I_2 \langle \cos^2(\omega t + \phi_2(t)) \rangle + 4\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\omega t + \phi_1(t)) \cos(\omega t + \phi_2(t)) \rangle,$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle sur le temps de réponse du détecteur. Or

$$\langle \cos^2(\omega t + \phi_1(t)) \rangle = \langle \cos^2(\omega t + \phi_2(t)) \rangle = \frac{1}{2}.$$

De plus,

$$\langle \cos(\omega t + \phi_1(t)) \cos(\omega t + \phi_2(t)) \rangle = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\langle \cos(2\omega t + \phi_1(t) + \phi_2(t)) \rangle}_{=0} + \langle \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t)) \rangle \right).$$

Ainsi, en notant $\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ la phase relative entre les deux ondes, on obtient

$$I_{\text{tot}}(t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \phi(t) \rangle,$$

Pour $I_1 = I_2 = I_0$, si $\phi = 0$ alors $I_{\text{tot}} = 4I_0$; si $\phi = \pi$ alors $I_{\text{tot}} = 0$. Si la phase $\phi(t)$ fluctue au cours du temps, le profil spatial du champ d'interférences va être moyenné à l'échelle du temps de réponse du détecteur par le terme $\langle \cos \phi(t) \rangle$. Si $\phi(t)$ fluctue sur $[0; 2\pi[$, alors $\langle \cos \phi(t) \rangle \rightarrow 0$ donc

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2.$$

Deux ondes sont incohérentes si leur déphasage fluctue sur $[0; 2\pi[$ à une échelle de temps inférieure au temps de réponse du détecteur. Pour la lumière, la grandeur détectée n'est pas le champ électrique \vec{E} mais l'intensité lumineuse $\langle \vec{E}^2 \rangle$: c'est le cas des détecteurs les plus courants comme l'œil, un pixel de caméra, etc... De même pour la plupart des ondes, les détecteurs sont sensibles à l'**intensité** et non la grandeur ondulatoire. Le processus de détection est donc **quadratique** avec l'amplitude de l'onde s

$$I \propto s^2.$$

Par exemple, pour une onde acoustique, la grandeur ondulatoire est la surpression δp mais l'oreille est sensible à $\langle \delta p^2 \rangle$. Ainsi, toute détection d'onde se faisant en intensité sera sensible au phénomène d'interférences.

Les interférences seront observables suivant la cohérence des ondes superposées à l'échelle de temps de réponse du détecteur utilisé.

2.3. Interférences à deux ondes



Approximation scalaire

Une onde lumineuse est une onde vectorielle de champs électrique et magnétique (\vec{E}, \vec{B}) . L'approximation scalaire consiste à négliger le caractère vectoriel de l'onde et ne conserver que l'information sur le caractère ondulatoire en introduisant une grandeur appelée *vibration lumineuse* $s(\vec{r}, t)$ (par exemple l'amplitude du champ électrique).

VII. Interférences et spectroscopie

On considère deux sources S_1 et S_2 , de pulsations ω_1 et ω_2 et de phases φ_1 et φ_2 . Soit M un point de l'espace où se superposent les ondes $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$ avec

$$s_1(M, t) = s_{1,0} \cos\left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{S}_1 \vec{M} + \varphi_1\right), \quad \text{et} \quad s_2(M, t) = s_{2,0} \cos\left(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{S}_2 \vec{M} + \varphi_2\right),$$

et alors l'onde résultante s'écrit $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$. Si on note L_i le chemin optique de la source S_i vers M (dans un milieu d'indice n), on a

$$\vec{k}_i \cdot \vec{S}_i \vec{M} = k_i \cdot S_i M = \frac{2\pi}{\lambda_i} n S_i M = \frac{2\pi}{\lambda_i} L_i.$$

D'où l'expression de l'onde en M

$$s(M, t) = s_{1,0} \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} L_1 + \varphi_1\right) + s_{2,0} \cos\left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} L_2 + \varphi_2\right).$$

Le détecteur est sensible à l'intensité $I = s^2$, à un facteur numérique près que l'on omet. Alors

$$I_1(M, t) = \langle s_1(M, t)^2 \rangle = s_{1,0}^2 \left\langle \cos^2\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} L_1 + \varphi_1\right) \right\rangle.$$

Or

$$\left\langle \cos^2\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} L_1 + \varphi_1\right) \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad I_1(M, t) = \frac{s_{1,0}^2}{2}, \quad \text{et} \quad I_2(M, t) = \frac{s_{2,0}^2}{2}.$$

Ainsi

$$\underbrace{\langle s(M, t)^2 \rangle}_{=I} = \underbrace{\langle s_1(M, t)^2 \rangle}_{=I_1} + \underbrace{\langle s_2(M, t)^2 \rangle}_{=I_2} + \underbrace{2\langle s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle}_{\text{terme d'interférences}}.$$

Evaluons le terme d'interférences

$$\langle s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle = s_{1,0}s_{2,0} \left\langle \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} L_1 + \varphi_1\right) \cos\left(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} L_2 + \varphi_2\right) \right\rangle,$$

or on a la relation de trigonométrie suivante

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b)),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \langle s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle &= \frac{s_{1,0}s_{2,0}}{2} \left(\left\langle \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1}L_1 - \frac{1}{\lambda_2}L_2\right) + \varphi_1 - \varphi_2\right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \cos\left((\omega_1 + \omega_2)t - 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1}L_1 + \frac{1}{\lambda_2}L_2\right) + \varphi_1 + \varphi_2\right) \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Or

$$\left\langle \cos\left((\omega_1 + \omega_2)t - 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1}L_1 + \frac{1}{\lambda_2}L_2\right) + \varphi_1 + \varphi_2\right) \right\rangle = 0,$$

et, **si** $\omega_1 \neq \omega_2$,

$$\left\langle \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1}L_1 - \frac{1}{\lambda_2}L_2\right) + \varphi_1 - \varphi_2\right) \right\rangle = 0.$$

En revanche, **si** $\omega_1 = \omega_2$, le terme $\left\langle \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t - 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1}L_1 - \frac{1}{\lambda_2}L_2\right) + \varphi_1 - \varphi_2\right) \right\rangle$ est a priori non nul. Donc pour avoir cohérence entre les deux sources S_1 et S_2 , il faut que les ondes soient émises à la **même fréquence** donc à la **même longueur d'onde** : $\boxed{\omega_1 = \omega_2}$ et $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$. Si cette condition est satisfaite, alors

$$\langle s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle = \frac{s_{1,0}s_{2,0}}{2} \left\langle \cos\left(2\pi\left(\frac{L_1 - L_2}{\lambda}\right) + \varphi_2 - \varphi_1\right) \right\rangle.$$

On note alors

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

le déphasage entre les deux sources. Si $\Delta\varphi = \text{Cte}$, alors $\langle s_1(M,t)s_2(M,t) \rangle \neq 0$. Si $\Delta\varphi$ varie temporellement de 0 à 2π , $\langle s_1(M,t)s_2(M,t) \rangle \approx 0$. Donc les deux sources S_1 et S_2 sont **cohérentes** si leur déphasage reste constant au cours du temps

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \approx \text{Cte},$$

d'où

$$\langle s_1(M,t)s_2(M,t) \rangle = \frac{s_{1,0}s_{2,0}}{2} \left\langle \cos \left(2\pi \left(\frac{\delta}{\lambda} \right) + \Delta\varphi \right) \right\rangle,$$

soit si $\Delta\varphi = \text{Cte}$

$$\langle s_1(M,t)s_2(M,t) \rangle = \frac{s_{1,0}s_{2,0}}{2} \cos \left(2\pi \left(\frac{\delta}{\lambda} \right) + \Delta\varphi \right),$$

avec δ la **différence de marche entre les deux rayons lumineux**

$$\delta = L_1 - L_2.$$

Attention, la différence de marche est une différence de chemin optique et non de chemin géométrique, elle inclue les effets d'indices.

Or, $s_{1,0} = \sqrt{2I_1}$ et $s_{2,0} = \sqrt{2I_2}$. D'où le résultat final

$$I(M,t) = I_1(M,t) + I_2(M,t) + 2\sqrt{I_1(M,t)I_2(M,t)} \cos \left(2\pi \left(\frac{\delta}{\lambda} \right) + \Delta\varphi \right).$$

Dans le cas de deux sources d'intensités égales $I_1 = I_2 = I_0/2$, on obtient

$$I = I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} + \Delta\varphi \right) \right).$$

Il faut que les deux sources émettent des fronts d'ondes de déphasage constant. En pratique, on prend une source primaire produisant deux sources secondaires intrinsèquement synchrones (voir Fig. VII.6). Dans le cas

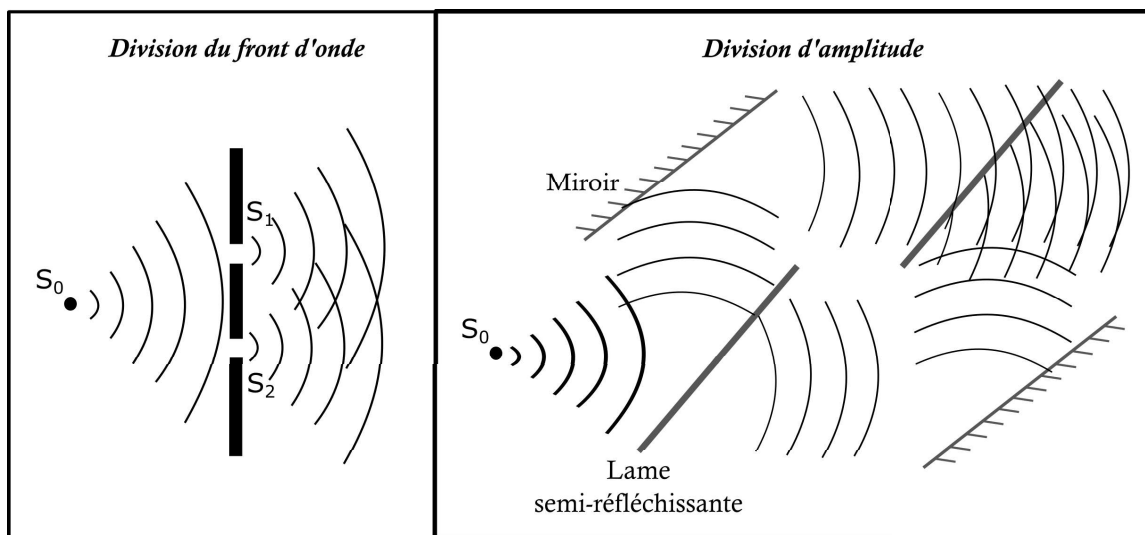


FIG. VII.6. Dispositifs interférenciels à division du front d'onde et division d'amplitude.

VII. Interférences et spectroscopie

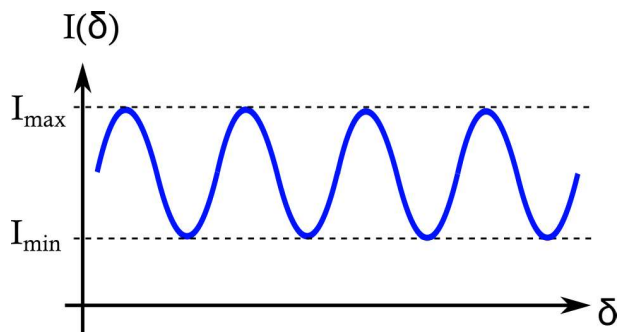


FIG. VII.7. Notion de contraste de franges d'interférences.

général, on obtient

$$I(\delta) = (I_1 + I_2) \left(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} + \Delta\varphi \right) \right).$$

On a alors

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad \text{et} \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

On définit le **contraste** C des interférences selon

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

et dans le cas considéré

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}.$$

On peut alors réécrire le profil d'intensité sous la forme suivante

$$I(\delta) = (I_1 + I_2) \left(1 + C \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} + \Delta\varphi \right) \right).$$

3. Exemple de dispositif interférométrique : les fentes d'Young

On considère un système de deux fentes éclairées de manière symétrique par une source unique S (voir Fig. VII.8). Ces deux sources secondaires sont cohérentes entre elles car elles sont issues de la même source unique. Les sources S_1 et S_2 secondaires se recouvrent et l'on observe le profil d'intensité dans le plan (O, x, y, z) . Etant donné que $SS_1 = SS_2$, les deux sources S_1 et S_2 sont en phase, soit

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0.$$

On cherche le profil d'intensité $I(M)$. Par symétrie, il ne dépend que de x . Soit H le projeté orthogonal de S_1 sur (S_2M) . On note $S_1S_2 = a$ l'écartement entre les fentes. La différence de marche va déterminer l'intensité en M notamment si les ondes interfèrent constructivement ou destructivement. Dans la limite où $a \ll D$, la différence de marche δ vaut alors (dans un milieu d'indice $n = 1$)

$$\delta \approx S_2H,$$

et

$$\sin \theta = \frac{S_2H}{a} = \frac{\delta}{a}.$$

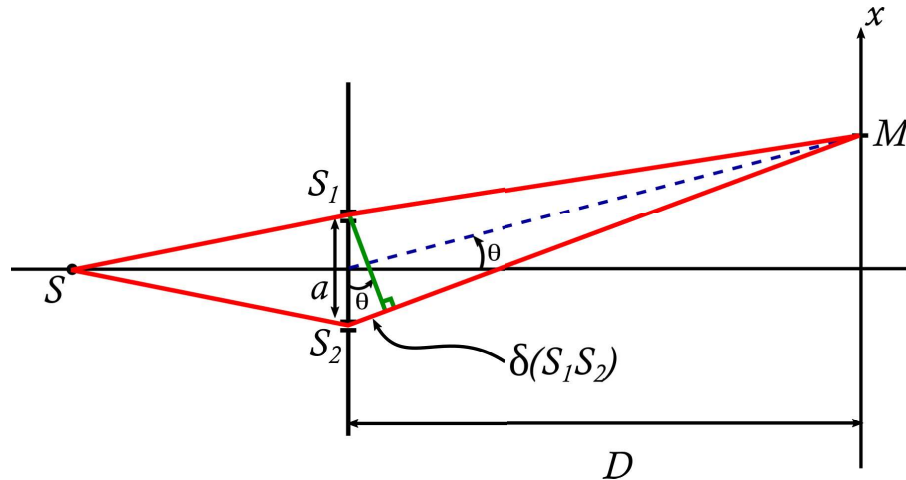


FIG. VII.8. Franges d'Young.

De plus,

$$\sin \theta = \frac{x}{D},$$

où D est la distance de l'écran aux bifentes. On en déduit

$$\delta = \frac{a}{D}x.$$

D'où

$$I(x) = I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{a}{\lambda D} x \right) \right).$$

On introduit l'**interfrange** i comme la périodicité spatiale des franges d'interférences selon

$$I(x) = I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right).$$

Interprétation en terme de différence de marche

$$I(\delta) = I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \right),$$

avec

$$\delta = n(S_2M - S_1M),$$

la différence de marche entre deux points sources S_1 et S_2 dans un milieu d'indice n . Un maximum d'intensité correspond à des interférences constructives soit

$$\delta = p\lambda, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Un minimum d'intensité correspond à des interférences destructives soit

$$\delta = \left(p + \frac{1}{2} \right) \lambda, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

On introduit k , l'**ordre d'interférence** en M , tel que

$$k = \frac{\delta}{\lambda}.$$

VII. Interférences et spectroscopie

Si k est entier, les interférences seront constructives. si k est demi-entier, les interférences seront destructives. On peut ainsi définir les **surfaces d'interférences constructives**. Soit Σ_k la surface correspondant à l'ordre d'interférence k entier

$$\delta = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n(S_2M - S_1M) = k\lambda.$$

Donc $M \in \Sigma_k$ surface d'interférences constructives d'ordre k , si et seulement si

$$S_2M - S_1M = k \frac{\lambda}{b}.$$

C'est l'équation d'un hyperboloïde de révolution de foyers S_1 et S_2 . Dans un plan de coupe contenant les foyers S_1 et S_2 , on obtient l'allure de la courbe Fig. VII.9. Dans la limite des petits angles, on observe donc des *franges d'interférences* selon l'axe normal à l'axe S_1S_2 , alors que l'on observe des *anneaux d'interférences* selon l'axe S_1S_2 .

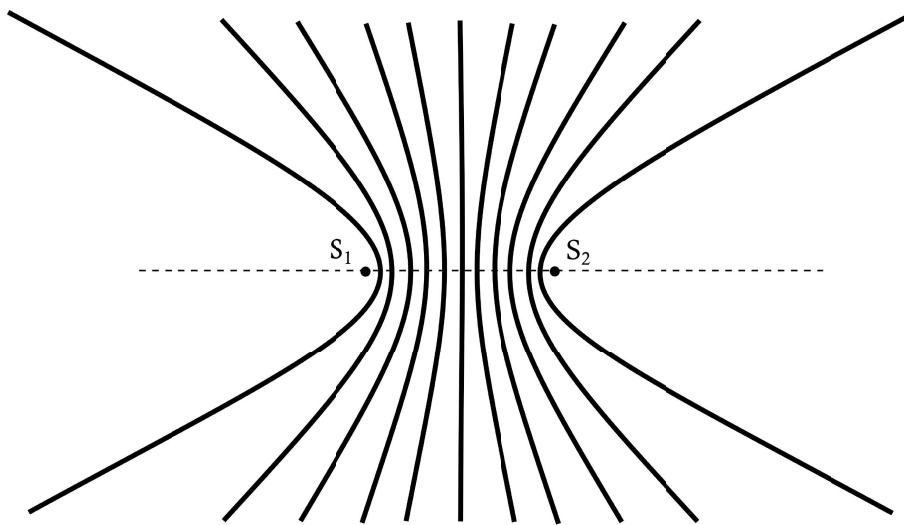


FIG. VII.9. Plan de coupe d'hyperboloïdes de révolution Σ_k contenant les foyers S_1 et S_2 .

4. Interférences à N ondes - spectroscopie

4.1. Réseau

Réseau

Un réseau est un dispositif constitué de N fentes se comportant comme N sources secondaires lorsqu'elles sont éclairées par une source unique. Issues de la même source, elles sont cohérentes entre elles.

Entre deux rayons consécutifs, on a une différence de marche non nulle δ_0 . On considère une onde incidente à la longueur d'onde λ . On suppose pour simplifier que cette onde est à l'incidence normale et que l'on observe à l'infini dans une direction θ . Soit a la distance entre deux fentes consécutives. On a

$$\delta_0 = a \sin \theta.$$

Les ondes vont interférer constructivement si $\delta_0 = p\lambda$, $p \in \mathbb{Z}$ donc

$$p\lambda = a \sin \theta_p.$$

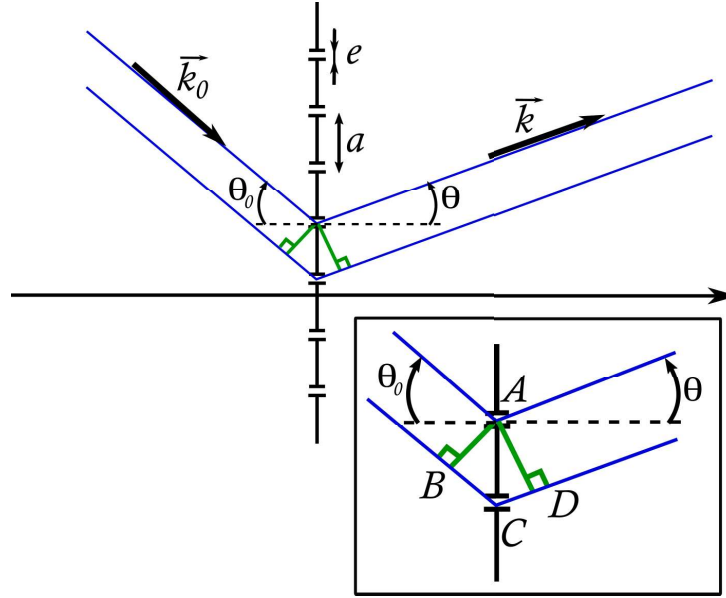


FIG. VII.10. Diffraction par un réseau plan.

On a donc des directions privilégiées θ_p pour la propagation de la lumière

$$\sin \theta_p = p \frac{\lambda}{a},$$

où p est l'ordre d'interférence. Pour un réseau donné (a), à un ordre donné (p), l'angle dépend de λ : $\theta_p(\lambda)$. Cette dépendance permet de décomposer spatialement la lumière en fonction des longueurs d'onde qui la composent.

Exemple 1 : cas d'un réseau à 500 traits/mm.

Quels sont les valeurs possibles pour p à $\lambda = 800\text{nm}$ et $\lambda = 400\text{nm}$?

On a alors $a \times 500 = 1\text{mm}$, soit $a = 2\mu\text{m}$. Pour $\lambda = 800\text{nm}$,

$$\sin \theta = p \frac{0,8}{2} = 0,4 \times p < 1.$$

On a donc cinq valeurs possibles pour p : -2; -1; 0; +1; +2.

Pour $\lambda = 400\text{nm}$, $\sin \theta = p \frac{0,4}{2} = 0,2 \times p < 1$. On a donc neuf valeurs possibles pour p : -4; -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; +4.

Exemple 2 : cas d'un réseau à 1000 traits/mm.

Alors $a = 1\mu\text{m}$. Pour $\lambda = 400\text{nm}$, $p = -2; -1; 0; +1; +2$. Alors que pour $\lambda = 800\text{nm}$, $p = -1; 0; +1$.

4.2. Influence du nombre de fentes éclairées

Soit $s(\theta)$ l'onde totale dans la direction θ , s_0 l'amplitude d'une onde émergeant d'une fente et φ le déphasage entre deux fentes consécutives

$$\varphi = 2\pi \frac{\delta_0}{\lambda} = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta.$$

L'onde totale $s(\theta)$ dans la direction θ est la superposition des N ondes

$$s(\theta) = s_0 \sum_{k=0}^{N-1} (e^{j\varphi})^k = s_0 \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = s_0 e^{j(\frac{N}{2} - \frac{1}{2})\varphi} \frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})},$$

VII. Interférences et spectroscopie

et $I(\theta) = |s(\theta)|^2$ d'où

$$I(\varphi) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} s_0^2.$$

On note $I_0 = s_0^2$ et on obtient

$$I(\varphi) = N^2 I_0 f(\varphi), \text{ avec } f(\varphi) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \text{ et } \varphi = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta = 2\pi \frac{\delta}{\lambda},$$

où f est la fonction réseau.

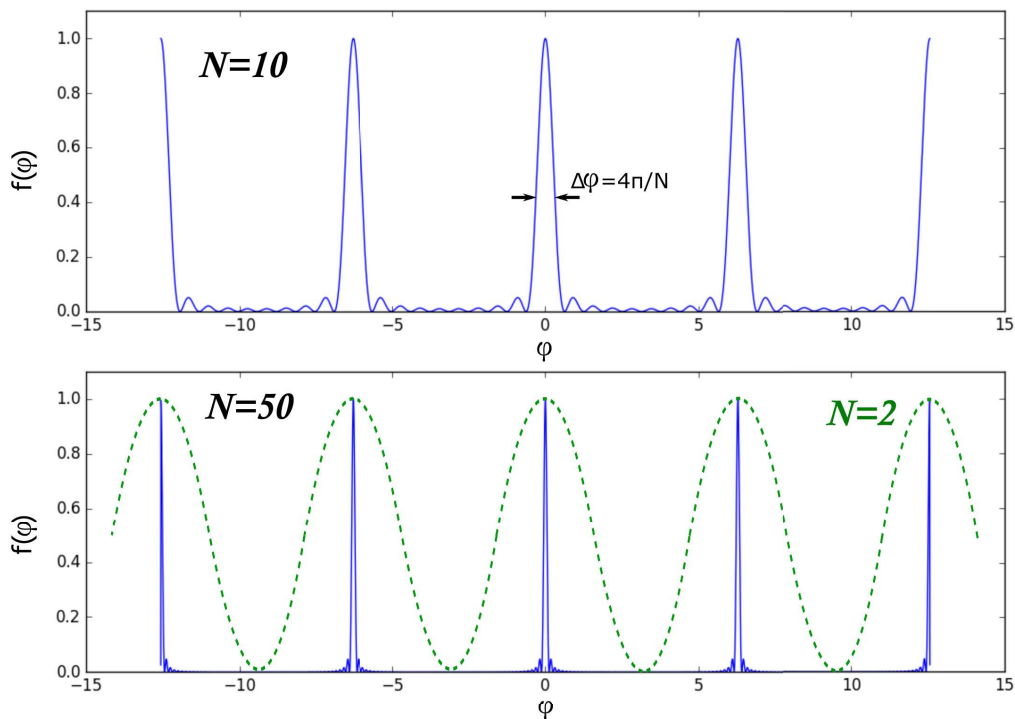


FIG. VII.11. Représentation graphique de la fonction réseau $f(\varphi)$ pour $N = 10$ et $N = 50$. À titre de comparaison, la figure d'interférences à 2 ondes est tracée en pointillés.

Intérêt de travailler à N ondes : la largeur d'un pic d'interférences constructives est en $\Delta\varphi = 4\pi/N$.

Remarque : N est le nombre de fentes éclairées. Il faut donc éclairer un réseau sur toute sa surface pour l'utiliser efficacement. Ces pics très fins permettent d'utiliser le réseau en spectroscopie.

4.3. Spectromètre à réseau

La direction de l'onde constructive issue d'un réseau dépend de la longueur d'onde λ . À un ordre d'interférence p donné, pour un réseau connu, la mesure de $\theta_p(\lambda)$ permet de calculer λ . L'application directe de ce phénomène est la spectroscopie, et la mesure du spectre d'une source lumineuse. **Tous les spectromètres**

modernes sont basés sur des systèmes à réseaux. La résolution ($\Delta\lambda$ minimal que l'on peut résoudre avec l'instrument) dépend de la largeur des pics mais aussi du pouvoir dispersif, *i.e.* de la grandeur

$$\left(\frac{d\theta_p}{d\lambda}\right),$$

la variation d'angle due à une variation de longueur d'onde. Un bon réseau a donc un pas *faible* et est éclairé sur une surface importante.

La *spectroscopie* est l'étude des phénomènes physiques par leur signature sur le spectre lumineux. C'est une science présente en recherche fondamentale mais également dans l'industrie : chimie analytique, physique, astronomie, etc....

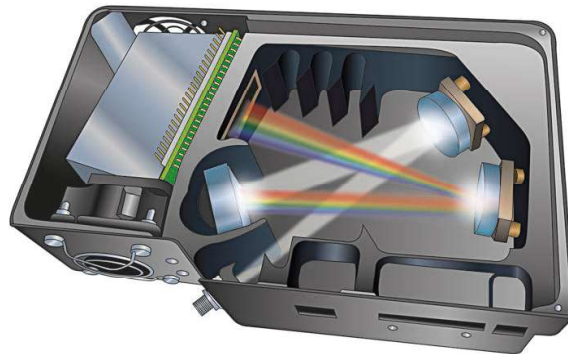


FIG. VII.12. Spectromètre commercial compact, à base d'un réseau, à connectique optique fibrée et connectique informatique USB.

VII. Interférences et spectroscopie

Compléments au chapitre *Interférences et spectroscopie*

1. Franges d'égales épaisseurs en lumière blanche



FIG. VII.13. Flaque d'essence sur sol mouillé : figure d'interférences en lumière blanche. Source : <https://en.wikipedia.org/wiki/Optics>

2. Expérience des fentes d'Young en lumière monochromatique

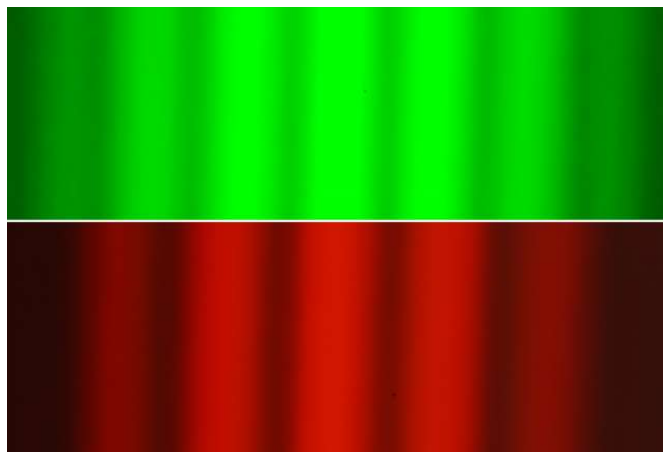


FIG. VII.14. Expérience des fentes d'Young en lumière monochromatique, influence de la longueur d'onde. Source : archives ouvertes de la société française d'optique, #sfo-00291703, <https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/>

VII. Interférences et spectroscopie

3. Expérience des fentes d'Young en lumière blanche



FIG. VII.15. Expérience des fentes d'Young en lumière blanche, visualisation des irisations. Source : archives ouvertes de la société française d'optique, #sfo-00291698, <https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/>

4. Exemple d'application des interférences : visualisation d'écoulements en soufflerie.

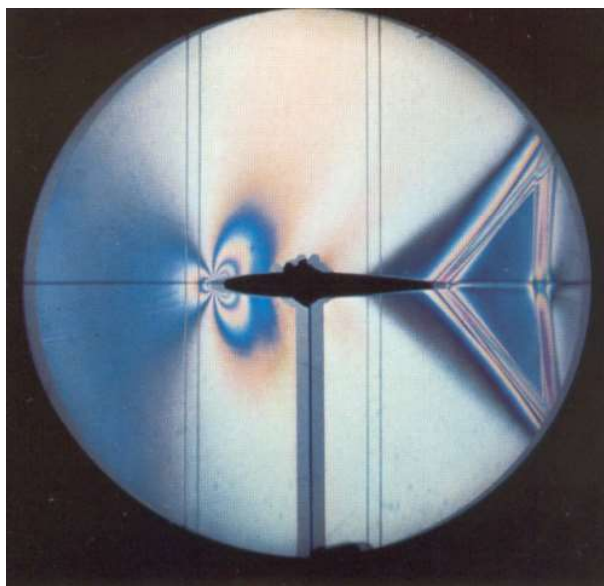


FIG. VII.16. Visualisation d'écoulements en soufflerie par méthodes interférométriques. Source : archives ouvertes de la société française d'optique, #sfo-00608121, <https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00608121/en/>

5. Lumière blanche à travers un réseau de diffraction.

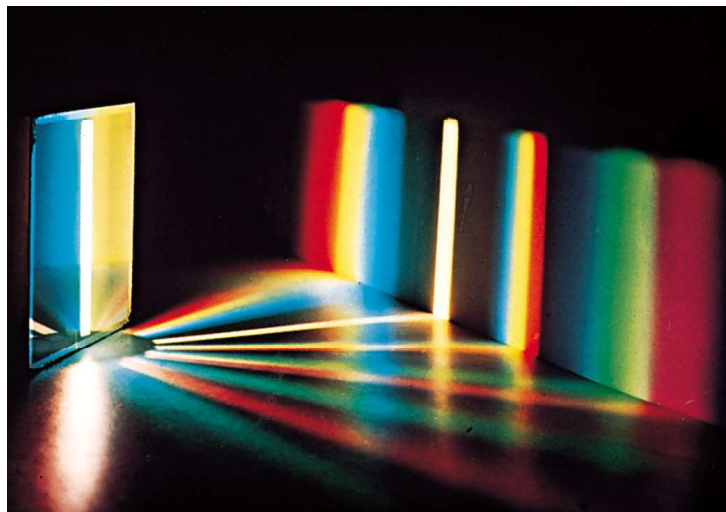


FIG. VII.17. Dispersion d'un faisceau de lumière blanche par un réseau. Source : <https://www.britannica.com/technology/diffraction-grating>

6. Décomposition d'un faisceau lumineux par un réseau.

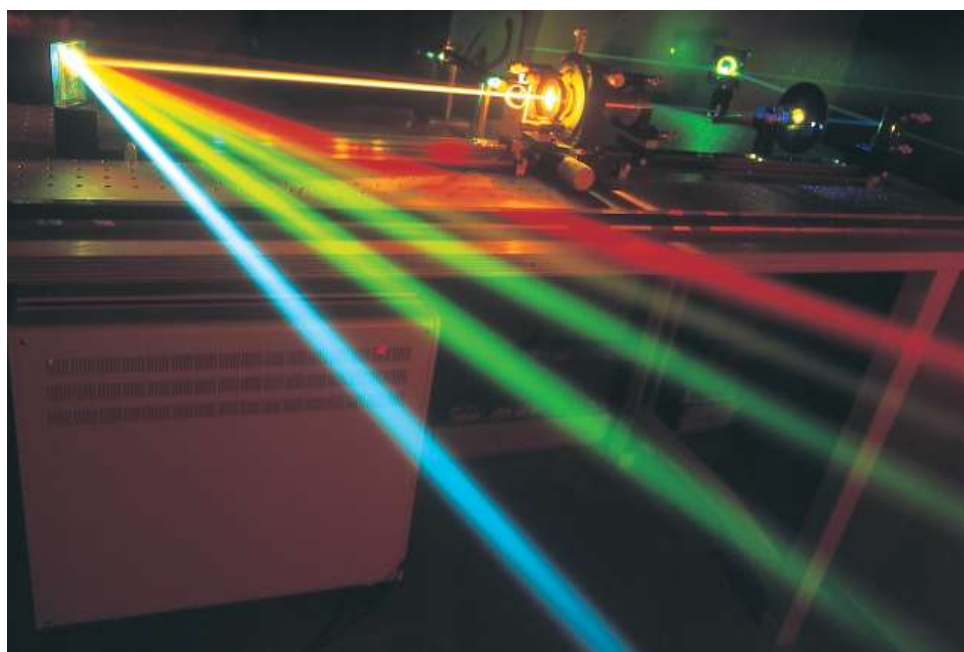


FIG. VII.18. Dispersion d'un faisceau de lumière blanche par un réseau. Source : Archives ouvertes de la société française d'optique, #sfo-00464229, <https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/>

7. Applications de la spectrométrie



FIG. VII.19. Mesure à l'aide d'un spectromètre Raman portable de la nature des verres (silicates mixtes de potassium, calcium et sodium) constitutifs des vitraux (XIII^e siècle) de la verrière de la Sainte-Chapelle (Paris). Source : Archives ouvertes de la société française d'optique. <https://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/>

8. Théorie élémentaire de la diffraction

8.1. Principe de Huygens-Fresnel

*Chaque point M d'une surface Σ atteinte par la lumière peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le point M .
Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.*

Soit P un point de la surface Σ éclairée et M un point de l'espace (point d'observation), on note θ l'angle entre la direction \vec{PM} et $d\vec{\Sigma}$ le vecteur normal à Σ en P . Alors

$$ds(M) = A(\theta)s(P)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma \longrightarrow s(M) = \int_{\Sigma} A(\theta)s(P)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma,$$

car les différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

En pratique, on considère des rayons faiblement inclinés, alors $A(\theta) \approx C^{\text{te}}$, soit

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s(P)\frac{e^{ikPM}}{PM}d\Sigma.$$

Si on applique Huygens-Fresnel au cas considéré (surface Σ de transmittance $t(x,y)$). Soit M un point d'observation, et P un point courant de Σ . Alors

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P)t(x,y)\frac{e^{ikPM}}{PM}dxdy.$$

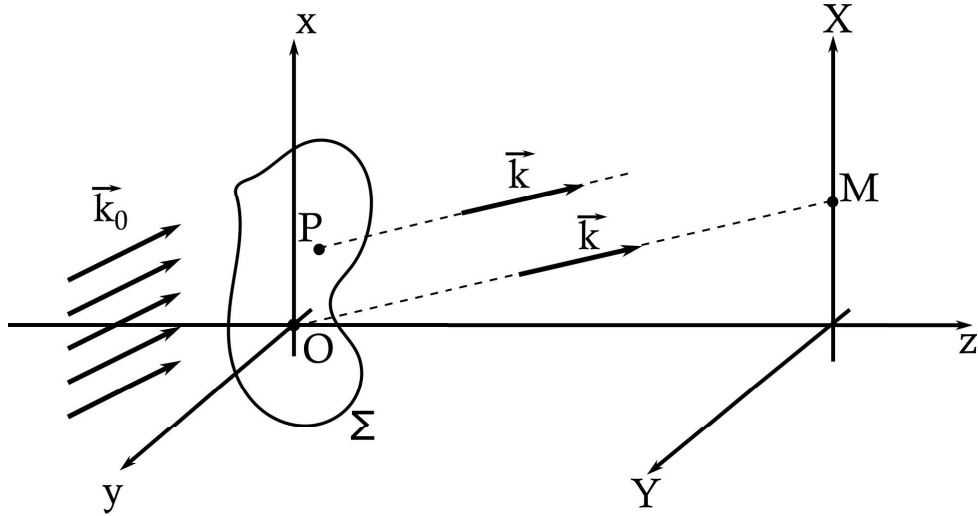


FIG. VII.20. Géométrie considérée.

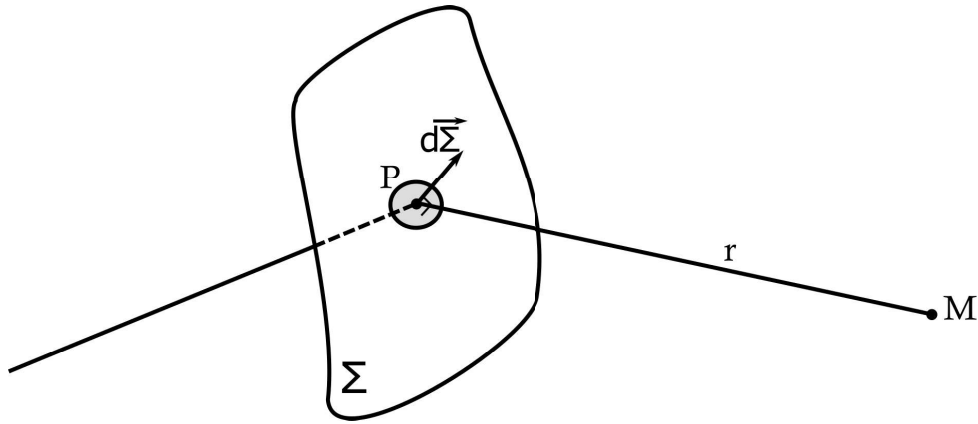


FIG. VII.21. Principe de Huygens-Fresnel.

Or $\vec{PM} = \begin{pmatrix} x-X \\ y-Y \\ D \end{pmatrix}$ et

$$PM^2 = D^2 \left(1 + \left(\frac{x-X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y-Y}{D} \right)^2 \right),$$

soit

$$\begin{aligned} PM &= D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - 2 \frac{xX + yY}{D^2}}, \\ &\approx D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{D} \right)^2 - \frac{xX + yY}{D^2} \right). \end{aligned}$$

On pose $\alpha = \frac{x}{D}$ et $\beta = \frac{Y}{D}$ les angles directeurs de \vec{OM} , et $r^2 = x^2 + y^2$, distance de P à O. Alors

$$PM = D \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{\alpha X + \beta Y}{D} \right)$$

VII. Interférences et spectroscopie

Hypothèses :

$$\begin{cases} \frac{x}{D}; \frac{y}{D}; \frac{r}{D} \ll 1 \text{ pupille petite,} \\ \frac{\alpha}{D}; \frac{\beta}{D} \ll 1 \text{ petits angles.} \end{cases}$$

Alors $PM \approx D$ mais **pour évaluer la phase dans kPM , il faut tenir compte des variations de PM à l'échelle de λ .**

$$e^{ikPM} \approx e^{ikD} e^{ik\frac{D}{2}(\alpha^2+\beta^2)} \underbrace{e^{ik\frac{r^2}{2D}}}_{\text{terme quadratique en } x \text{ et } y} e^{-ik(\alpha x + \beta y)},$$

alors si

$$\boxed{kr^2 \ll D} \Leftrightarrow \boxed{D \gg \frac{r^2}{\lambda}},$$

on peut négliger le terme quadratique dans la phase. D'où

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{ikD}}{D} e^{ik\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)} e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy.$$

La dépendance angulaire est considérée comme étant faible, donc $e^{ik\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)}$ est une constante pour un point M donné, alors, **dans les conditions dites de Fraunhofer** $kr^2 \ll D$ (" $D \rightarrow +\infty$ "),

$$\boxed{s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P) t(P) e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy.}$$

On peut le reformuler en introduisant $\vec{OM} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et \vec{k} le vecteur d'onde de direction \vec{OM} . Cela correspond à l'interférence entre les différents points sources en observant à l'infini. Chaque point P de Σ a un déphasage par rapport à O $\delta\varphi$

$$\delta\varphi = \vec{k} \cdot \vec{OP} = k(\alpha x + \beta y),$$

et obtient immédiatement le résultat précédent

$$s(M) \propto \int_{\Sigma} s_0(P) t(P) e^{i\delta\varphi(P)} dx dy.$$

*En pratique, ces conditions sont valables pour une **observation à l'infini** et dans le cadre de la **formation des images** (d'où son importance).*

À l'infini, dans la direction $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, ou en $\begin{pmatrix} f\alpha \\ f\beta \end{pmatrix}$ si une lentille L conjugue l'infini.

— Si $D \ll \frac{r^2}{\lambda}$, on est dans le cadre de la diffraction de Fresnel, où l'on doit tenir compte du terme quadratique,

— Si $D \gg \frac{r^2}{\lambda}$, on est dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer.

Remarque : Si on se place directement dans l'approximation de Fraunhofer, l'obtention de la formule de diffraction est beaucoup plus rapide.

Si on observe la diffraction dans la direction \vec{k} , pour une onde plane incidente de vecteur d'onde \vec{k}_0 , on a $\vec{k} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; $\alpha = \frac{x}{D}$; $\beta = \frac{y}{D}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$. D'où

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P) t(x, y) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{PM}}}{PM} dx dy,$$

Or $PM \approx D$, $\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP}$, $s_0(P) = s_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{OP}}$, d'où

$$\begin{aligned} s(M) &= \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} dx dy, \\ &= \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{\frac{2i\pi}{\lambda}(x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0))} dx dy. \end{aligned}$$

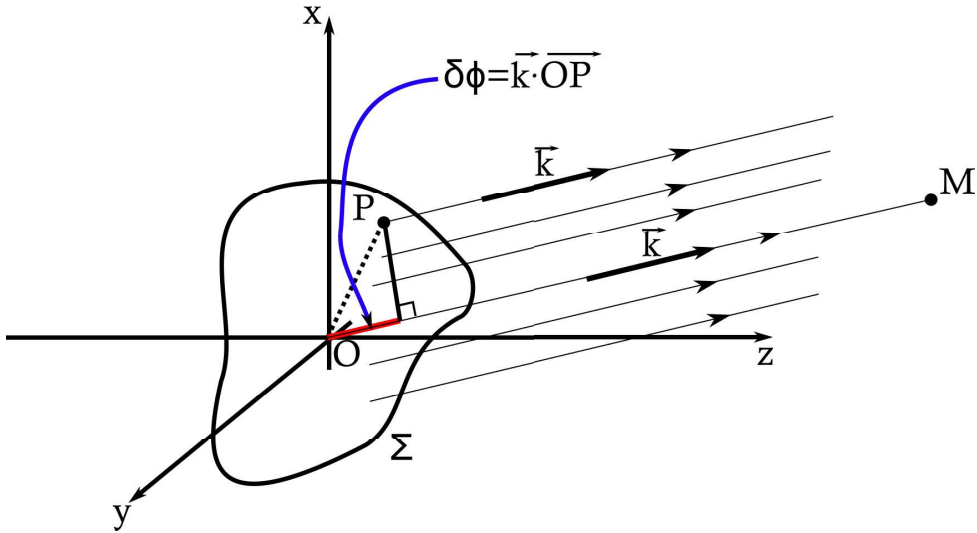


FIG. VII.22. Calcul de l'amplitude de la vibration lumineuse en se plaçant directement dans l'approximation de Fraunhofer.

8.2. Figure de diffraction d'une fente rectangulaire.

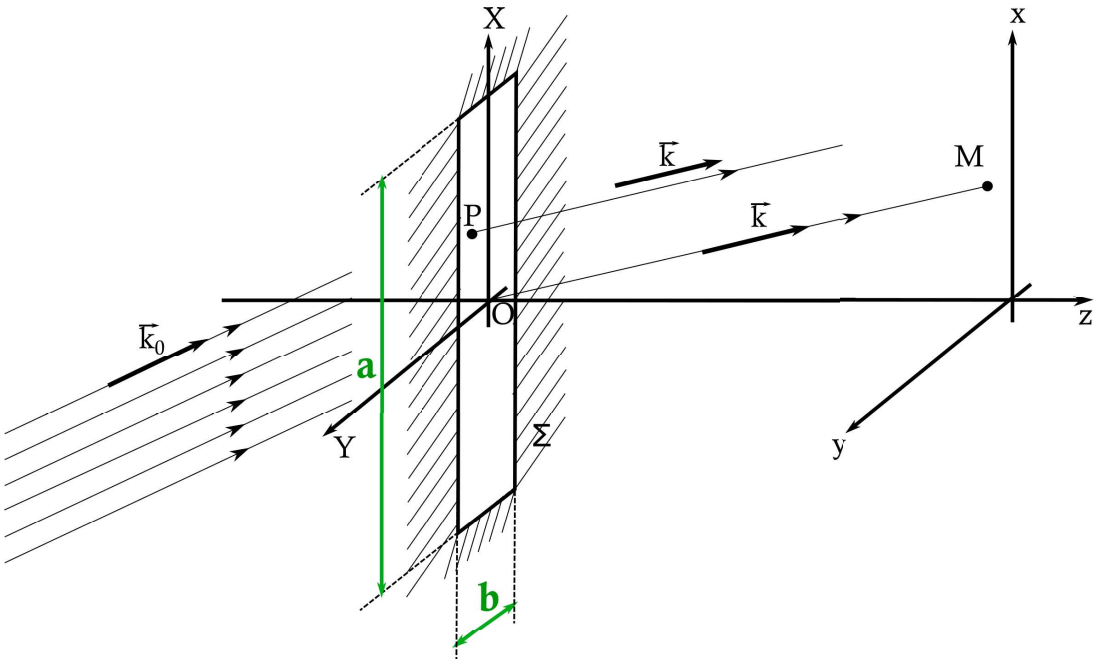


FIG. VII.23. Diffraction par une fente rectangulaire.

VII. Interférences et spectroscopie

Dans le plan focal image de la lentille L , que l'on note Π' , on a, en $M = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\alpha \\ f\beta \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} s(M) &= s_0 \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-a/2}^{+a/2} dx e^{ik(\alpha x + \beta y)}, \\ &= s_0 \left[-\frac{1}{ik\alpha} \left(-2i \sin \frac{ka\alpha}{2} \right) \right] \left[-\frac{1}{ik\beta} \left(-2i \sin \frac{kb\beta}{2} \right) \right], \\ &= abs_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f} \right). \end{aligned}$$

D'où le profil d'intensité

$$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f} \right).$$

Fente de largeur a, b : pour une fente infiniment fine $b \rightarrow 0$, $I \rightarrow I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right)$, de largeur $\frac{2\lambda f}{a}$ (première annulation en $\frac{\lambda f}{a}$) (on diffracte **perpendiculairement** à la fente).

Pour un trou de rayon a : il est compris entre une fente carrée de côté $2a$ et une autre de côté $\sqrt{2}a$. La largeur de la tâche de diffraction de ces carrés sont $\frac{\lambda f}{a}$ et $\frac{\sqrt{2}\lambda f}{a}$.

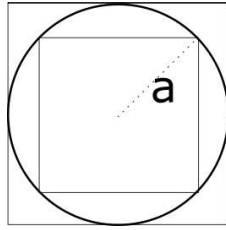


FIG. VII.24. Un trou de rayon a est compris entre deux carrés de côté $2a$ et $\sqrt{2}a$.

Donc la largeur angulaire du rayon de la tâche de diffraction du trou de rayon a est θ tel que

$$\frac{\lambda}{a} < \theta < \frac{\sqrt{2}\lambda}{a} \rightarrow \frac{\lambda}{a} < \theta < 1.4 \frac{\lambda}{a}.$$

Donc $\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{a} \pm 0.2 \frac{\lambda}{a}$. Or, le calcul complet et exact fait appel aux fonctions de Bessel, il prévoit

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{a}.$$

Remarque : **Base de l'optique de Fourier.**

On a une relation de transformée de Fourier entre $t(x, y)$ et le profil d'intensité dans le plan image de L (dit **plan de Fourier**).

8.3. Théorème de Babinet.

Soit deux écrans de transmittance $t_1(x, y)$ et $t_2(x, y)$ complémentaires ($t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1 \forall x, y$) Σ_1 et Σ_2 . **En dehors de l'image géométrique**, les figures de diffractions données par les deux écrans sont identiques.

DÉMONSTRATION : Vibration en M pour l'écran Σ_1

$$s_{\Sigma_1}(M) = A \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy,$$

de même pour l'écran Σ_2

$$s_{\Sigma_2}(M) = A \int_{\Sigma_2} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x,y) dx dy.$$

En M , en dehors de l'image géométrique, si on n'a pas d'écran

$$I = s \cdot s^* = 0 \rightarrow s = 0.$$

Or

$$s = A \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x,y) dx dy + A \int_{\Sigma_2} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x,y) dx dy = s_{\Sigma_1}(M) + s_{\Sigma_2}(M) = 0.$$

Donc $s_{\Sigma_1}(M) = -s_{\Sigma_2}(M)$, soit

$$I_{\Sigma_1}(M) = I_{\Sigma_2}(M).$$

8.4. Diffraction par un ensemble de structures

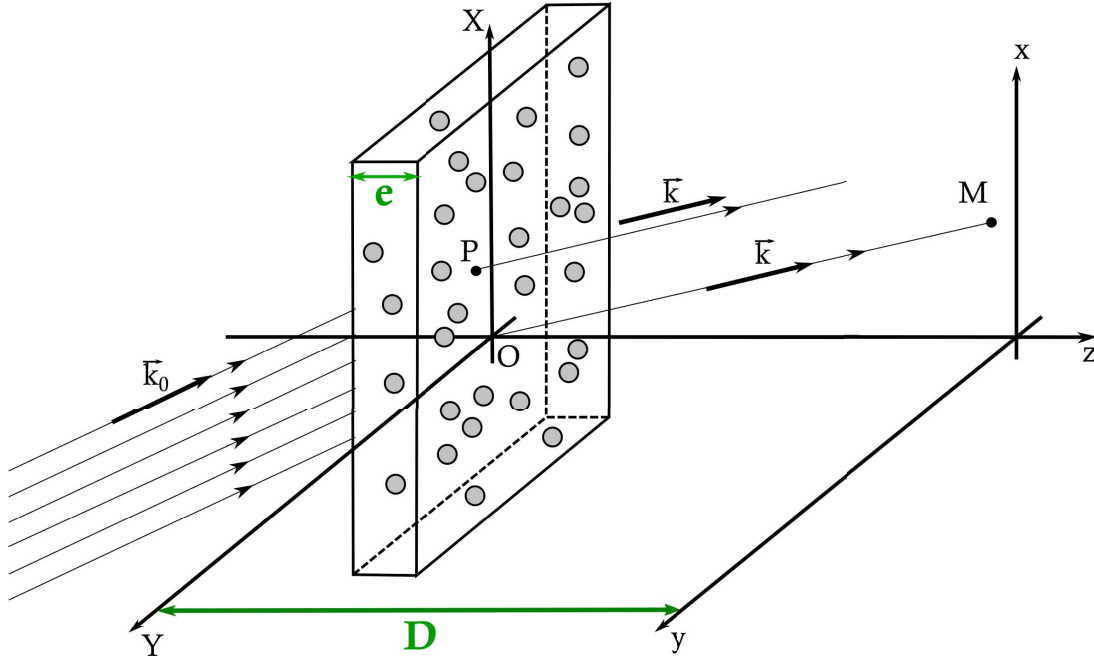


FIG. VII.25. Diffraction par un ensemble de structures.

On applique le principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P) t(P) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{PM}}}{PM} dx dy.$$

A chaque élément diffractant $\{k\}$, on associe une transmittance $t_k(P)$ et une position P_k . On a alors $s_0(P) = s_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{OP}}$, et

$$t(P) = \sum_k t_k(P).$$

On note $\vec{R}_k = \vec{OP}_k$. Alors

$$\begin{cases} \vec{PM} = \vec{PP}_k + \vec{P}_k\vec{O} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{P}_k\vec{P} - \vec{R}_k, \\ \vec{OP} = \vec{OP}_k + \vec{P}_k\vec{P} = \vec{R}_k + \vec{P}_k\vec{P}. \end{cases}$$

VII. Interférences et spectroscopie

De plus, $PM \approx D$ (sauf dans la phase où on garde le développement limité). Alors

$$s(M) = \frac{As_0}{D} \int_{\Sigma} \sum_k t_k(P) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{R}_k} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{P}_k \vec{P}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{P}_k \vec{P}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}_k} d\Sigma.$$

Si on note $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$,

$$s(M) = \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \sum_k \left(e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_k} \underbrace{\int_{\Sigma} t_k(P) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{P}_k \vec{P}} d\Sigma}_{\text{indépendant de } k} \right)$$

$$s(M) = \frac{As_0}{D} e^{i\vec{k} \cdot \vec{OM}} \underbrace{\left(\sum_k e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_k} \right)}_{\text{Facteur de structure}} \underbrace{\int_{\text{1 structure}} t_0(P) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \delta\vec{r}} d\Sigma}_{\text{Facteur de forme}}$$

8.5. Applications en cristallographie.

Cas d'une répartition aléatoire.

On a

$$I \propto |s(M)|^2 = |s'_0|^2 \left| \sum_k e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_k} \right|^2 \underbrace{\left| \int_{\Sigma} t_0(P) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \delta\vec{r}_k} \right|^2}_{=i(P) \text{ diffraction d'un seul motif}}.$$

Soit $A = \left| \sum_k e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_k} \right|^2$ le facteur de structure. On a

$$\begin{aligned} A &= \left| \sum_k e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_k} \right|^2, \\ &= \sum_{k,m} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot (\vec{R}_k - \vec{R}_m)}, \\ &= \sum_{k=m} 1 + \sum_{k \neq m} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot (\vec{R}_k - \vec{R}_m)}, \\ &= N + \underbrace{\sum_{k \neq m} e^{i\Delta\vec{k} \cdot (\vec{R}_k - \vec{R}_m)}}_{\approx 0 \text{ si } N \text{ grand}}. \end{aligned}$$

Donc

$$I(P) = Ni(P).$$

Si on a N motifs répartis aléatoirement, on obtient N fois en intensité le profil d'un motif unique.

Applications : mesure du diamètre de poudres,...

Structures périodiques : réseau.

Si les motifs sont répartis de manière ordonnée, une relation de phase déterminée est établie entre chacun d'eux et le deuxième terme de la somme précédent est non nul.

On envisage le cas simple du réseau plan. On considère une onde plane incidente de vecteur d'onde \vec{k}_0 , et on observe l'onde diffractée en \vec{k} . On cherche la différence de marche entre deux éléments successifs. Selon les notations de la figure, on a

$$\delta = BC + CD = -a \sin \theta_0 + a \sin \theta,$$

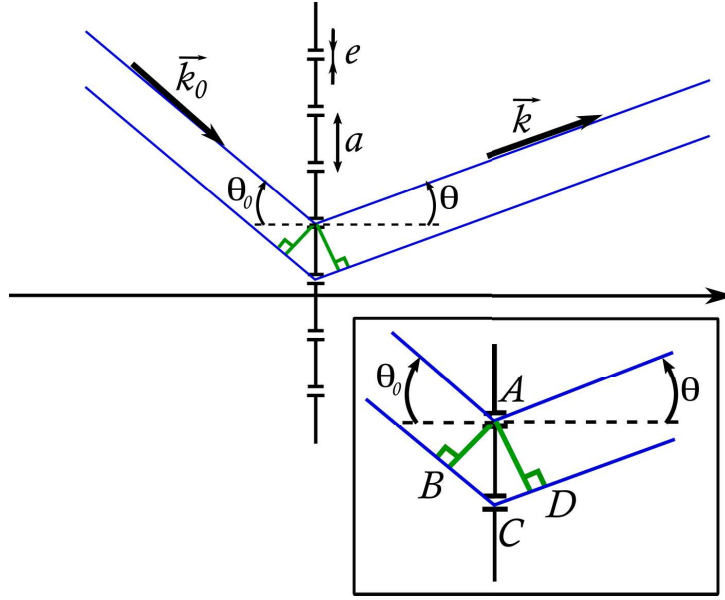


FIG. VII.26. Diffraction par un réseau plan.

car $\theta_0 < 0$ dans le cas de figure considéré. Interférences entre les ondes diffractées par les N traits : elles seront constructives si

$$n\lambda = \delta,$$

la formule dite des réseaux

$$\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n \frac{\lambda}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le motif élémentaire est une fente, le facteur de forme sera donc un sinus cardinal

$$i(P) = i_0 \text{sinc}^2 \left(\pi \frac{e}{\lambda} \theta \right).$$

Facteur de structure : on pose $\Delta \vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$.

$$A = \sum_m \sum_l e^{-i\Delta \vec{k} \cdot (m-l)\vec{a}},$$

d'après la formule précédente, car $\vec{R}_m = m\vec{a}$.

Deuxième méthode : on fait le raisonnement classique avec $\varphi = 2\pi \frac{a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$ et $s = s_0 \sum e^{in\varphi}$. Alors $I = I_0 \left| \sum e^{in\varphi} \right|^2$. Donc

$$\begin{aligned} A &= \sum_m \sum_l e^{i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} (m-l)a}, \\ &= \left| \sum_m e^{i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} ma} \right|^2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N e^{i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} am} &= \frac{1 - e^{i\varphi N}}{1 - e^{i\varphi}} e^{i\varphi}, \\ &= e^{i\frac{\varphi(N+1)}{2}} \frac{\sin \left(\frac{\varphi N}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

VII. Interférences et spectroscopie

Donc

$$A = N^2 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2}_{\max=1}$$

Donc

$$I_{\max} \propto N^2,$$

et non N contrairement au cas d'une répartition aléatoire. D'où l'expression complète

$$I = N^2 I_0 \underbrace{\text{sinc}^2\left(k_0 (\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{e}{2}\right)}_{=0 \text{ quand } \varphi \frac{e}{2a} = p\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2$$

Le facteur de forme s'annule quand $\varphi \frac{e}{2a} = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ soit $\varphi = 2p\pi \frac{a}{e}$.

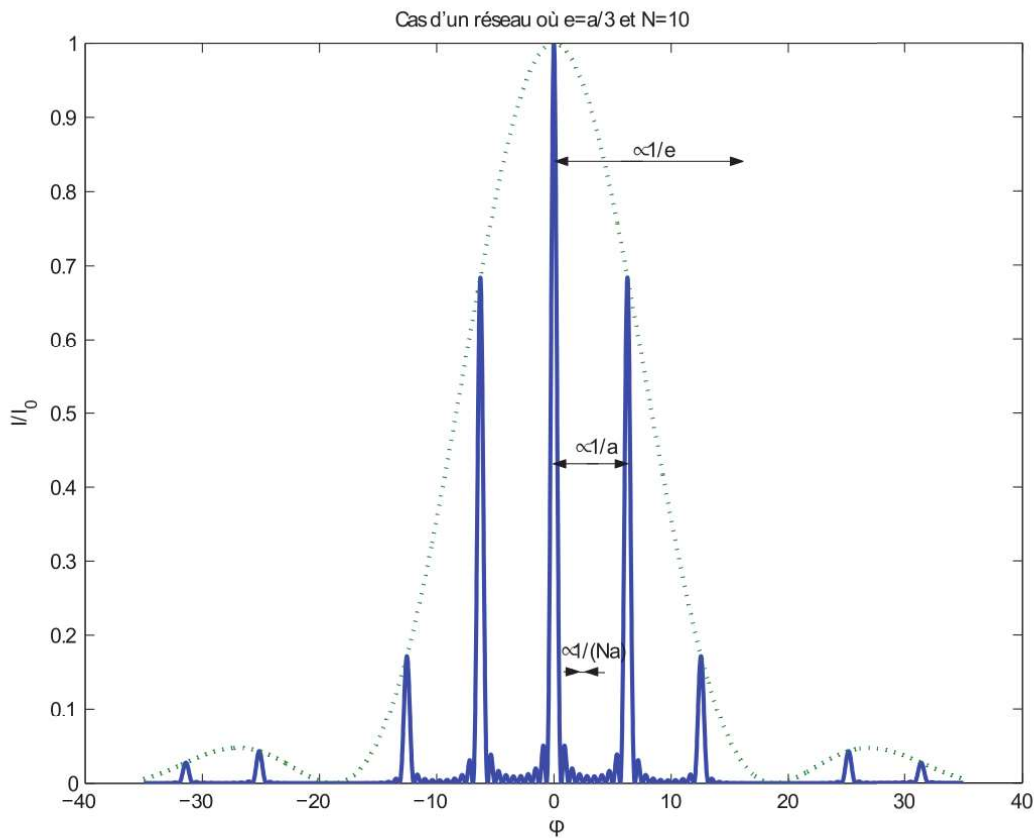


FIG. VII.27. Diffraction par un réseau plan, dans le cas où $e = \frac{1}{3}a$ et $N = 10$.

Toutes les longueurs caractéristiques du réseau apparaissent sur la figure.

Pouvoir dispersif.

$$\left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right| \text{ tel que } \left| \frac{d\varphi}{d\lambda} \right| \text{ soit maximal.}$$

Si on se place dans l'ordre m : $\left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right|_m = ?$. On a

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) a = 2m\pi,$$

or $d\varphi = 0$ sur un pic, donc en différenciant l'expression précédente, on obtient

$$ad\theta \cos \theta = md\lambda,$$

d'où

$$\boxed{\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)_m = \frac{m}{a \cos \theta}}.$$

On remarque en particulier qu'il n'y a pas de dispersion dans l'ordre 0.

Si on considère des petits angles, en pratique, $\theta \approx 0$, donc

$$\boxed{\left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)_m \approx \frac{m}{a}}.$$

Le pouvoir dispersif est d'autant plus important que l'ordre est important et que a est faible.

Pour la spectroscopie, il faut faire un compromis entre l'ordre, le pouvoir de dispersion et l'intensité.

Pouvoir de résolution. Soit $\delta\varphi$ entre deux pics qu'on arrive à résoudre. On définit le pouvoir de résolution PR selon

$$\text{PR} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

On considère que l'on est à la limite de résoudre deux pic quand le maximum de l'un coïncide avec la première annulation de l'autre. On note $\delta\varphi$ la différence de phase correspondante. Au voisinage d'un pic, par 2π -périodicité de la fonction sinus, on peut se ramener au voisinage de $\varphi \sim 0$ et considérer que $\delta\varphi \ll 1$. Alors

$$\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \approx \text{sinc}\left(\frac{N\varphi}{2}\right),$$

car $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$. Donc

$$I \approx I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right),$$

centré en $\varphi = 0$.

Première annulation de I en $\delta\varphi$ par définition de $\delta\varphi$, soit $\frac{N\delta\varphi}{2} = \pi$. Or $\varphi = 2\pi\frac{a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$. Si on passe de λ à $\lambda + \delta\lambda$, on a une variation de phase correspondante

$$\varphi' = \varphi + \delta\varphi = 2\pi (\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{a}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda}},$$

Si $\delta\lambda \ll \lambda \implies \delta\varphi = \varphi \frac{\delta\lambda}{\lambda}$. Donc

$$\begin{cases} \frac{N\delta\lambda}{2\lambda} \varphi = \pi, \\ \varphi = 2m\pi, \end{cases} \quad \text{d'où } mN \frac{\delta\lambda}{\lambda} = 1.$$

soit

$$\boxed{\text{PR} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN}.$$

Le pouvoir de résolution d'un réseau est d'autant plus important que l'ordre est important, et que le nombre de figures diffractantes éclairées est important. On voit donc émerger les 3 dimensions caractéristiques du réseau

VII. Interférences et spectroscopie

	Espace réel	Espace réciproque
$L = Na$	dimension la plus grande	dimension la plus petite petites annulations de la fonction des réseaux BF spatiales
a	dimension intermédiaire distance entre les fentes	directions de sélection ordres du réseau HF spatiales
e	plus petite dimension taille d'une fente	modulation globale THF spatiales

Annexe A

Références

1. Les équations de Maxwell

1.1. Références bibliographiques

Physique PC-PC*, tout-en-un, 5ième édition (2019)

Marie-Noëlle Sanz, Bernard Salamito, Dominique Chardon et François Vandembrouck.
Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1007-9053-1.

- Chapitre 12 : Sources du champ électromagnétique (pages 477 à 486);
- Chapitre 13 : Champ électrostatique (pages 487 à 532);
- Chapitre 14 : Exemples de champs électrostatiques (pages 533 à 545);
- Chapitre 17 : Champ magnétostatique (pages 609 à 648);
- Chapitre 19 : Équations de Maxwell (pages 669 à 702).

Ondes et électromagnétisme (2009)

Maxime Nicolas.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-10-054276-5.

- Chapitre 6 : Ondes électromagnétiques (pages 133 à 159).

1.2. Ressources en ligne

Cours en ligne d'électromagnétisme

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/>

Protection des vents solaires par la magnétosphère terrestre

<https://twitter.com/Rainmaker1973/status/1194200696918294533/video/1>

Vidéo d'une aurore boréale

<https://twitter.com/wonderofscience/status/1209678926882033664/video/1>

Formation des aurores boréales

<https://twitter.com/ZonePhysics/status/1187753153187504129/video/1>

2. L'induction et l'énergie magnétique

2.1. Références bibliographiques

Physique PCSI, tout-en-un, 5ième édition (2019)

Bernard Salamito, Stéphane Cardini, Damien Jurine, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel et François Clausset.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1008-0020-9.

- Chapitre 28 : Champ magnétique (pages 1049 à 1066);
- Chapitre 29 : Actions d'un champ magnétique (pages 1067 à 1080);
- Chapitre 30 : Lois de l'induction (pages 1081 à 1092);
- Chapitre 31 : Circuit fixe dans un champ magnétique variable (pages 1093 à 1120);
- Chapitre 32 : Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (pages 1121 à 1160);

A. Références

Ondes et électromagnétisme (2009)

Maxime Nicolas.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-10-054276-5.

— Chapitre 6 : Ondes électromagnétiques (pages 133 à 159).

2.2. Ressources en ligne

Autoformation : les rails de Laplace

https://www.youtube.com/watch?v=p_XVrZaaMRo

Visualisation du freinage électromagnétique

<https://www.instagram.com/p/9owRR8qJBk/>

Recuit de surface par induction

<https://twitter.com/Rainmaker1973/status/1178671333078704128/video/1>

3. Ondes électromagnétiques dans le vide

3.1. Références bibliographiques

Optique et physique ondulatoire, 3ième édition (1986)

Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux et Jacques Renault.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-0401-6540-6.

— Chapitre 3 : Autres aspects des phénomènes ondulatoires (pages 47 à 61);

— Chapitre 4 : Les ondes électromagnétiques et l'optique (pages 62 à 77).

Physique PC-PC*, tout-en-un, 5ième édition (2019)

Marie-Noëlle Sanz, Bernard Salamito, Dominique Chardon et François Vandembrouck.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1007-9053-1.

— Chapitre 27 : Ondes électromagnétiques dans le vide (pages 983 à 1012).

Physique PCSI, tout-en-un, 5ième édition (2019)

Bernard Salamito, Stéphane Cardini, Damien Jurine, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel et François Clausset.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1008-0020-9.

— Chapitre 4 : Ondes lumineuses (pages 129 à 166).

Ondes et électromagnétisme (2009)

Maxime Nicolas.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-10-054276-5.

— Chapitre 6 : Ondes électromagnétiques (pages 133 à 159).

3.2. Ressources en ligne

Cours de Walter Lewin (en anglais) : Electromagnetic Waves, Polarization

https://www.youtube.com/watch?v=FyNgs_viwBg

Lightbeam book's (exploitation des propriétés des polariseurs)

<https://twitter.com/Rainmaker1973/status/1209126695896268800/video/1>

4. Ondes électromagnétiques dans les milieux

4.1. Références bibliographiques

Physique PC-PC*, tout-en-un, 5^{ème} édition (2019)

Marie-Noëlle Sanz, Bernard Salamito, Dominique Chardon et François Vandenbrouck.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1007-9053-1.

- Chapitre 28 : Phénomènes de propagation linéaires - Dispersion, absorption (pages 1013 à 1058);
- Chapitre 29 : Interface entre deux milieux (pages 1059 à 1081).

Ondes et électromagnétisme (2009)

Maxime Nicolas.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-10-054276-5.

- Chapitre 7 : Ondes électromagnétiques et matière (pages 160 à 200).

4.2. Ressources en ligne

Animation géogebra sur les ondes stationnaires

<https://www.geogebra.org/m/S2qrjFm6>

5. Propriétés des ondes

5.1. Références bibliographiques

Optique et physique ondulatoire, 3^{ème} édition (1986)

Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux et Jacques Renault.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-0401-6540-6.

- Chapitre 1 : Quelques caractéristiques des phénomènes ondulatoires (pages 1 à 23);
- Chapitre 3 : Autres aspects des phénomènes ondulatoires (pages 47 à 61).

Physique PC-PC*, tout-en-un, 5^{ème} édition (2019)

Marie-Noëlle Sanz, Bernard Salamito, Dominique Chardon et François Vandenbrouck.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1007-9053-1.

- Chapitre 25 : Ondes mécaniques unidimensionnelles (pages 885 à 932).

5.2. Ressources en ligne

Illustration de la linéarité de l'équation d'onde

<https://twitter.com/Rainmaker1973/status/970332335462932480?s=03>

Corde de Violon en slow-motion

<https://www.youtube.com/watch?v=6JeyiM0YNo4>

Visualisation d'ondes sonores stationnaires : tube de Ruben

<https://www.youtube.com/watch?v=pWekXMZJ2zM>

6. Optique géométrique

Physique - Fluorescence, les manuels visuels pour la licence (2017)

Albane Douillet, Catherine Even-Beaudoin, Nathalie Lebrun, Nathalie Lidgi-Guigui et Nicolas Vernier.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1007-4832-7.

- Chapitre 13 : Les bases de l'optique géométrique (pages 346 à 369);
- Chapitre 14 : Les images optiques (pages 370 à 393);

A. Références

— Chapitre 15 : Lentilles minces et applications (pages 394 à 423).

Optique et physique ondulatoire, 3ième édition (1986)

Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux et Jacques Renault.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-0401-6540-6.

- Chapitre 5 : Rayons lumineux, lois de Snell-Descartes (pages 78 à 95);
- Chapitre 6 : Le principe de Fermat (pages 96 à 107);
- Chapitre 7 : Le problème du stigmatisme et l'approximation de Gauss (pages 108 à 131);
- Chapitre 8 : Lentilles minces et systèmes optiques simples dans l'approximation de Gauss (pages 151 à 173).

Optique - Une approche expérimentale et pratique, 1re édition (2011)

Sylvain Houard.

Ed. de Boeck. ISBN : 978-2-8041-6339-6.

- Chapitre 2 : Réflexion et réfraction de la lumière (pages 39 à 71);
- Chapitre 3 : Formation des images (pages 73 à 83);
- Chapitre 4 : Lentilles minces dans les conditions de Gauss (pages 85 à 112);
- Chapitre 7 : Instruments d'optique (pages 147 à 191).

Physique PCSI, tout-en-un, 5ième édition (2019)

Bernard Salamito, Stéphane Cardini, Damien Jurine, Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel et François Clausset.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1008-0020-9.

- Chapitre 5 : Optique géométrique (pages 167 à 226).

Physique PC-PC*, tout-en-un, 5ième édition (2019)

Marie-Noëlle Sanz, Bernard Salamito, Dominique Chardon et François Vandenbrouck.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1007-9053-1.

- Chapitre 20 : Modèle scalaire des ondes lumineuses (pages 705 à 744).

6.1. Ressources en ligne

Simulator de tracé de rayon lumineux

<https://ricktu288.github.io/ray-optics/simulator/>

7. Interférences et spectroscopie

7.1. Références bibliographiques

Optique et physique ondulatoire, 3ième édition (1986)

Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux et Jacques Renault.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-0401-6540-6.

- Chapitre 10 : Interférences lumineuses non localisées entre deux ondes cohérentes (pages 174 à 208).

Physique PC-PC*, tout-en-un, 5ième édition (2019)

Marie-Noëlle Sanz, Bernard Salamito, Dominique Chardon et François Vandenbrouck.

Ed. Dunod. ISBN : 978-2-1007-9053-1.

- Chapitre 21 : Superposition d'ondes lumineuse (pages 745 à 764);
- Chapitre 22 : Dispositif interférentiel par division du front d'onde : les trous d'Young (pages 765 à 812).

Optique - Une approche expérimentale et pratique, 1re édition (2011)

Sylvain Houard.

Ed. de Boeck. ISBN : 978-2-8041-6339-6.



- Chapitre 8 : Interférences lumineuses, section 8.3 - Interférences non localisées à deux ondes totalement cohérentes. Dispositifs à division du front d'onde (pages 203 à 211);
- Chapitre 8 : Interférences lumineuses, section 8.4 - Interférences lumineuses dans la nature (pages 212 à 218);
- Chapitre 8 : Interférences lumineuses, annexe 8.1 - Propagation des ondes (pages 241 à 244);
- Chapitre 9 : Polarisation de la lumière, section 9.1 - Approche historique (pages 250 à 252);
- Chapitre 9 : Polarisation de la lumière, section 9.2 - Polarisation rectiligne de la lumière (page 252);
- Chapitre 9 : Polarisation de la lumière, section 9.3 - Dichroïsme et filtres polariseurs (pages 253 à 254);
- Chapitre 9 : Polarisation de la lumière, section 9.4 - Loi de Malus (page 255);

7.2. Ressources en ligne

Autoformation : interférences lumineuses

<https://www.youtube.com/watch?v=9RifDT3eMy4>

Interférences dans les opales

<https://twitter.com/ZonePhysics/status/1209073559739535366/video/1>

A. Références

Annexe B

Contenu du cours

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Les équations de Maxwell	
Notion de champ scalaire et vectoriel Notion de flux et de circulation d'un champ vectoriel Opérateurs vectoriels gradient, divergence, rotationnel, laplacien Théorème de Green-Ostrogradsky Théorème de Stokes-Ampère Opérateur nabla	Orienter une surface et un chemin Appliquer les théorèmes de Green-Ostrogradsky et Stokes-Ampère en exploitant les symétries Choisir les bonnes surfaces/chemins Calculer l'expression des opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes <i>L'expression des opérateurs dans les autres systèmes de coordonnées n'est pas à connaître.</i> L'utilisation de nabla n'est pas exigible
Equations de Maxwell Densité volumique de charges et de courants	Connaître la loi d'ohm locale Connaître des ordres de grandeur de conductivité électrique
Equation de Maxwell-Faraday en statique Potentiel électrostatique Notion de surface équipotentielle Effet de pointe Energie électrostatique	Relier le potentiel scalaire V au champ électrique Prédire qualitativement la structure du champ électrique autour d'un conducteur
Equation de Maxwell-Gauss en statique Equation de Poisson Loi de Coulomb Théorème de Gauss	Appliquer le théorème de Gauss à une distribution de charge à symétrie sphérique
Flux de champ magnétique Potentiel vecteur Sources de champ magnétique	
Loi de Biot et Savart Théorème d'Ampère	Appliquer le théorème d'Ampère en exploitant les symétries Appliquer le théorème d'Ampère au cas du fil infini
ARQS Equations de Maxwell dans l'ARQS	Appliquer les équations de Maxwell dans le régime de l'ARQS
2. L'induction et l'énergie magnétique	
Force de Laplace Expérience des rails de Laplace	Connaître les expériences qualitatives permettant de mettre en évidence le phénomène d'induction

B. Contenu du cours

Notions et contenus	Capacités exigibles
Loi de Faraday Circuit fixe dans un champ magnétique variable Principe de l'alternateur	Relier le champ électrique aux potentiels vecteur et scalaire dans le cas général Savoir orienter convenablement la f.e.m. induite Interpréter l'induction comme un effet de modulation (loi de Lenz) Décrire le principe de fonctionnement d'une centrale électrique
Circuit mobile dans un champ magnétique statique Travail des forces de Laplace Energie potentielle d'interaction Forces magnétiques	Etablir les équations électriques et mécaniques d'un couplage électromécanique Effectuer un bilan d'énergie et l'interpréter en terme de conversion électromécanique
Autoinduction Cas du solénoïde infini Energie magnétique d'une bobine	Relier le flux d'une bobine à son courant par le coefficient d'autoinduction
Le haut-parleur Les microphones <i>Approche documentaire : le phénomène d'induction dans quelques domaines industriels</i>	
3. Les ondes électromagnétiques dans le vide	
Equation d'onde pour le champ électrique et pour le champ magnétique	Savoir démontrer l'équation d'onde à partir des équations de Maxwell
L'onde plane progressive monochromatique (OPPM) Propagation, sens de propagation	Déterminer la direction de propagation d'une OPPM Connaître et savoir démontrer la relation de dispersion dans le vide
Structure d'une onde plane Structure locale d'onde plane	
Polarisation des ondes électromagnétiques Polarisation rectiligne, circulaire droite, circulaire gauche, elliptique Polariseur	La loi de Malus n'est pas abordée dans le cours mais en TD
Bilan local d'énergie électromagnétique Vecteur de Poynting Interprétation corpusculaire	Savoir calculer le vecteur de Poynting pour des champs électriques et magnétiques en notation réelle. L'expression du vecteur de Poynting complexe n'est pas exigible. Savoir faire un bilan d'énergie électromagnétique Connaître l'ordre de grandeur du flux solaire à la surface de la Terre

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels - réflexion et réfraction	
Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique	Etablir la relation de dispersion dans un milieu conducteur Discuter des ordres de grandeurs pour simplifier la relation de dispersion Etablir l'expression de la longueur de peau et connaître son interprétation Etablir la relation de dispersion dans un milieu diélectrique de permittivité relative donnée Relier l'indice optique à la permittivité relative Connaître l'expression la longueur d'onde et du vecteur d'onde en fonction de l'indice et de leur valeur dans le vide
Relations de passage des champs électriques et magnétiques à une interface entre deux milieux	Les démonstrations ne sont pas exigibles
Réflexion sur un miroir métallique Onde évanescente Cas du miroir parfait Ondes stationnaires Aspects énergétiques	Etablir l'expression des champs réfléchis Démontrer la structure d'onde stationnaire lorsqu'une onde est superposée à l'onde réfléchie
5. Propriétés des ondes	
Ondes sur une corde vibrante	Savoir établir l'équation d'onde pour une corde vibrante
Ondes sonores	L'équation d'onde pour les ondes sonores est admise, sa démonstration n'est pas exigible Connaître la définition de l'intensité acoustique en décibels, connaître la gamme spectrale audible par l'oreille humaine
Solution générale de l'équation de D'Alembert Linéarité de l'équation de D'Alembert Interférences Ondes stationnaires	
6. Optique géométrique	
Modèle de l'optique géométrique Limites du modèle Notion de rayon lumineux	Savoir estimer si l'approximation de l'optique géométrique est valide
Notion de chemin optique Principe de Fermat Notion de système optique Systèmes optiques centrés Stigmatisme rigoureux – stigmatisme approché Conditions de Gauss Notion de grandissement	
Relation de conjugaison du miroir plan Relation de conjugaison du dioptré plan Relation de conjugaison du dioptré sphérique	Les démonstrations des relations de conjugaison sont exigibles
La lentille mince Relation de conjugaison de la lentille mince	

B. Contenu du cours

Notions et contenus	Capacités exigibles
Construction géométrique dans le cas d'une lentille convergente Construction géométrique dans le cas d'une lentille divergente	Savoir effectuer des tracés de rayons lumineux
Focométrie (autocollimation, méthode de Silbermann, méthode de Bessel) La loupe Notion de grossissement commercial Le microscope (<i>en TD</i>) La lunette astronomique	Proposer un protocole de mesure de focal et discuter les incertitudes
7. Interférences - spectroscopie	
Interférences à deux ondes Notion de cohérence Condition d'obtention des interférences Contraste d'interférences	Savoir définir la cohérence entre deux sources à partir de considérations sur la phase relative Connaître les conditions d'obtention des interférences
Les fentes d'Young	Savoir établir le profil d'intensité Savoir définir l'interfrange

Annexe C

Acquis de L1 et L2S3

L1S1 : HLPH104 - Physique Générale S1

Mécanique : principe fondamental de la dynamique, travail d'une force, énergie mécanique, forces de Coulomb.

Electrocinétique : énergie potentielle électrostatique, intensité électrique, énergie stockée dans un condensateur, énergie stockée dans une bobine.

Thermodynamique : premier principe, conservation de l'énergie.

L1S2 : HLPH205 - Physique Générale S2

Outils mathématiques : systèmes de coordonnées, gradient d'un champ scalaire

Electrostatique :

- 1) loi de Coulomb, champ électrostatique, lignes de champ.
- 2) densité linéique, surfacique et volumique de charges.
- 3) potentiel électrostatique, surfaces équipotentielles.
- 4) flux d'un champ de vecteur, divergence, théorème de Green-Ostrogradsky, champ à flux conservatif, théorème de Gauss.
- 5) matériaux conducteurs, équilibre électrostatique, influence électrostatique.

L2S3 : HLPH319 - Physique Générale S3

Magnétostatique :

- 1) vecteur densité de courant, intensité électrique et son lien avec le vecteur densité de courant, force de Lorentz, travail de la force magnétique de Lorentz, force de Laplace, moment mécanique de la force de Laplace.
- 2) loi de Biot et Savart, champ magnétique d'un fil infini, champ d'une spire, champ d'un solénoïde, topographie du champ, symétries.
- 3) théorème d'Ampère.
- 4) divergence du champ magnétique, flux conservatif, rotationnel du champ magnétique, propriétés de continuité du champ à une interface.
- 5) potentiel vecteur, équation locale du potentiel vecteur, symétries du potentiel vecteur, potentiel vecteur du solénoïde.

Mécanique des fluides :

- 1) champs vectoriels et scalaires, lignes de courants, tubes de courant.
- 4) principe des bilans en systèmes ouverts.

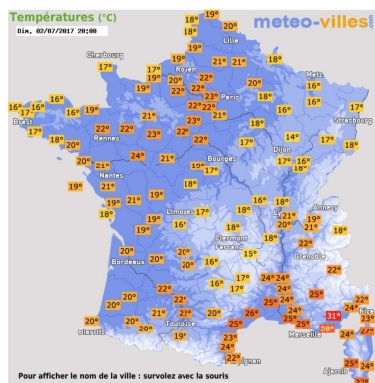
C. Acquis de L1 et L2S3

Annexe D

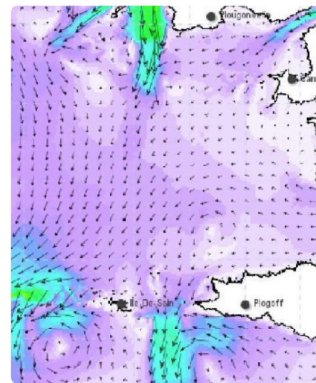
Outils mathématiques

1. Notion de champ

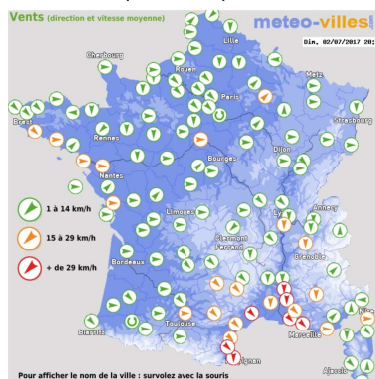
Des grandeurs physiques peuvent être définies sur des régions étendues de l'espace, et ainsi dépendent des coordonnées de l'espace et du temps. Ces grandeurs peuvent être scalaires (densité volumique de charge, potentiel électrostatique, pression, température,...) ou vectorielles (champ électrique, champ magnétique, vitesse d'un fluide,...) De telles grandeurs correspondent à ce que l'on appelle des champs scalaires ou des champs vectoriels. Exemple : le champ scalaire de pression $P(x, y, z, t)$ de l'atmosphère est un champ scalaire, donnant la valeur de la pression en tout point $M(x, y, z)$ à l'instant t .



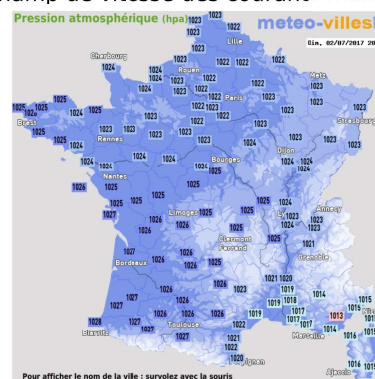
champ de températures



champ de vitesse des courants marins



champ de vitesse des vents

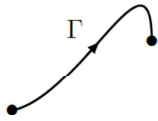


champ de pression atmosphérique

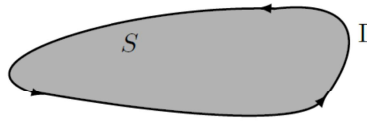
2. Contours ou chemins et surfaces

On appelle *contour* (ou *chemin*) toute courbe orientée Γ reliant deux points de l'espace. Lorsque la courbe est fermée, le chemin est dit lui-même fermé et définit alors une surface S associée. On appelle *surface fermée* une surface délimitant un volume V .

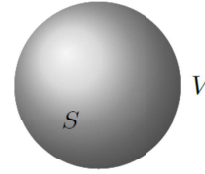
D. Outils mathématiques



(a) Contour orienté reliant deux points



(b) Contour fermé Γ délimitant une surface associée S



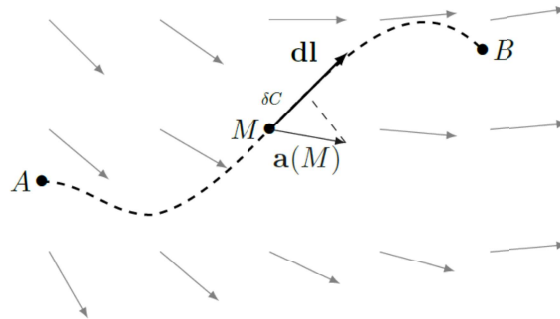
(c) Surface fermée S délimitant un volume associé V

- Une surface fermée est conventionnellement orientée positivement vers l'extérieur du volume qu'elle délimite.
- L'orientation d'une surface (ouverte) s'appuyant sur un chemin fermé est conventionnellement associée à l'orientation du chemin par la règle de la main droite, ou bien la règle du tire-bouchon.

3. Circulation et flux

3.1. Circulation d'un champ vectoriel

Considérons, dans une région où l'on a défini un champ de vecteur \vec{a} , un chemin Γ allant d'un point A à un point B .



Localement, en un point M de ce chemin, le sens de parcours est donné par le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l}$, localement tangent au chemin au point M et représentant le déplacement élémentaire le long du chemin Γ .

Circulation élémentaire d'un champ vectoriel

On appelle circulation élémentaire δC d'un champ vectoriel \vec{a} en un point M d'un chemin la projection locale du champ sur le chemin

$$\delta C = \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}.$$

Si la composante du champ le long du chemin est orientée dans le même sens que le chemin, la circulation élémentaire est positive, et dans le cas contraire elle est négative. Si le champ est localement orthogonal au chemin, la circulation élémentaire est nulle.

i Circulation d'un champ vectoriel entre deux points A et B d'un chemin Γ

On appelle circulation C d'un champ vectoriel \vec{a} entre deux points A et B d'un chemin Γ la somme des circulations élémentaires entre ces deux points

$$C = \int_A^B \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}.$$

Si le chemin Γ est fermé, on note la circulation du champ

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}.$$

3.2. Flux d'un champ vectoriel

Considérons, dans une région où l'on a défini un champ de vecteur \vec{a} , une surface S orientée. Localement, en un point M de cette surface, l'orientation de cette surface est donnée par le vecteur surface élémentaire $d\vec{S}$, localement normal à la surface et de norme égale à l'élément de surface élémentaire autour du point M

$$d\vec{S} = dS\vec{n},$$

\vec{n} étant le vecteur unitaire localement normal à la surface en M .

i Flux élémentaire d'un champ vectoriel

On appelle *flux élémentaire* $\delta\varphi$ d'un champ vectoriel \vec{a} en un point M d'une surface orientée la projection locale du champ sur le vecteur surface élémentaire

$$\delta\varphi = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}.$$

Si la composante du champ le long du vecteur surface élémentaire est orientée dans le même sens que la surface, le flux élémentaire est positif, et il est négatif dans le cas contraire. Si le champ est localement tangent à la surface, le flux élémentaire est nul.

i Flux d'un champ vectoriel à travers une surface S

On appelle *flux* φ d'un champ vectoriel \vec{a} à travers une surface S orientée la somme des flux élémentaires traversant l'ensemble de la surface

$$\varphi = \iint_S \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}.$$

Si la surface S est fermée, on note le flux

$$\varphi = \oiint_S \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}.$$

4. Les opérateurs vectoriels**4.1. Le gradient d'un champ scalaire**

Considérons un champ scalaire $f(M, t)$, fonction des coordonnées cartésiennes (x, y, z) et du temps t . L'évolution dans le temps du champ en un point donné fait intervenir la dérivée temporelle dont le calcul est immédiat. Notons df la variation élémentaire de f associé à un déplacement élémentaire $d\vec{l}$.

D. Outils mathématiques

Définition intrinsèque du gradient

Le gradient d'un champ scalaire f est défini par la relation

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\vec{l}.$$

L'opérateur gradient s'applique à un champ scalaire scalaire qu'il transforme en un champ vectoriel. L'ensemble des points tels que $f(x, y, z) = \text{Cte}$ définit une surface. Si, à partir d'un point de la surface, on se déplace de $d\vec{l}$ sur cette surface, c'est-à-dire dans le plan tangent à la surface au point considéré, $df = 0$. Cela implique que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orthogonal aux surfaces $f(x, y, z) = \text{Cte}$. Si on se déplace maintenant sur la normale, df est positif sur $\overrightarrow{\text{grad}}f$ et $d\vec{l}$ sont de même sens : $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est donc dirigé vers les f croissants.

Signification du gradient

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est orthogonal aux surfaces $f(x, y, z) = \text{Cte}$ et est dirigé vers les $f(x, y, z)$ croissants. Il indique dans quelle direction, dans quel sens et avec quelle intensité la grandeur $f(x, y, z)$ varie dans l'espace.

Cette définition possède un caractère intrinsèque car elle ne fait pas intervenir de système de coordonnées particulier. C'est à cette relation que nous ferons appel pour obtenir l'expression du gradient dans les différents systèmes de coordonnées.

Expression de l'opérateur gradient dans les différents systèmes de coordonnées

— En cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z,$$

— en cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z,$$

— en sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi.$$

Remarque : on utilise souvent l'opérateur symbolique $\vec{\nabla}$, appelé opérateur *nabla* et s'exprimant en cartésien de la façon suivante

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Cet opérateur agit sur le champ scalaire f , de sorte que son gradient peut s'exprimer à partir de l'opérateur nabla

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f.$$

Champ à circulation conservative

Un champ vectoriel est dit à *circulation conservative* si, pour tout couple de points A et B de l'espace, la circulation du champ le long d'un chemin reliant les points A et B ne dépend pas du chemin choisi pour relier ces deux points : on dit que la circulation du champ est indépendante du chemin suivi. La circulation d'un tel champ de A à B peut donc s'exprimer comme la différence des valeurs d'une fonction scalaire

f , définie à une constante près, en A et en B

$$\int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A).$$

En conséquence, la circulation sur un chemin fermé d'un tel champ est nulle

$$\oint \vec{a}(M) \cdot d\vec{l} = 0.$$

Sous forme infinitésimale

$$\vec{a} \cdot d\vec{l} = df,$$

or, d'après la définition du gradient

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l}.$$

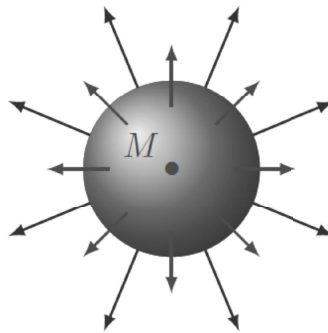
On en déduit que **un champ à circulation conservative est le gradient d'un champ scalaire**

$$\vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} f,$$

avec le champ scalaire f **défini à une constante près.**

4.2. Divergence d'un champ vectoriel

Considérons un champ vectoriel \vec{a} et l'élément de volume dV associé à un point M de l'espace. On peut alors construire le flux élémentaire $\delta\phi$ du champ \vec{a} à travers la surface fermée délimitant le volume dV .



Définition intrinsèque de l'opérateur divergence

L'opérateur divergence en M du champ vectoriel \vec{a} est défini par la relation

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\delta\phi}{dV}$$

Le champ résultant de l'opérateur divergence est un champ scalaire. La signification physique de l'opérateur divergence est intimement liée à la notion de flux : un champ de vecteurs "diverge" en un point M si son flux à travers un volume élémentaire associé à ce point est non nul. En coordonnées cartésiennes, l'expression analytique s'obtient à partir de la définition intrinsèque en explicitant $dV = dx dy dz$ et le calcul du flux à travers un cube élémentaire.

i Expression de l'opérateur divergence dans les différents systèmes de coordonnées

— En cartésiennes

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

— en cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial r a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

— en sphériques

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}.$$

4.3. Théorème de Green-Ostrogradski

La définition de l'opérateur divergence introduit l'égalité

$$\delta \phi = \operatorname{div} \vec{a} dV.$$

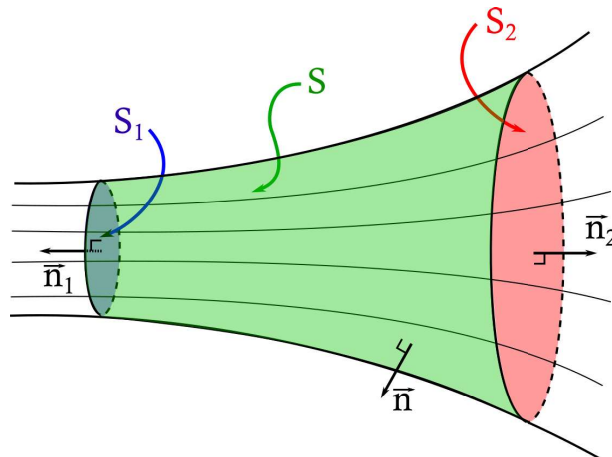
En intégrant cette égalité sur un volume V quelconque, on obtient le théorème de Green-Ostrogradski

i Théorème de Green-Ostrogradski

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée est égale à l'intégrale de sa divergence sur le volume délimité par cette surface

$$\oiint \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint \operatorname{div} \vec{a} dV.$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski, tout champ à divergence nulle a un flux nul à travers toute surface fermée : on dit qu'il est à flux conservatif.



Si l'on construit une surface fermée Σ à partir d'un tube de champ (ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un chemin fermé) et de deux sections S_1 et S_2 de ce tube, un champ à flux conservatif a un flux nul à travers Σ . Or, il est nul à travers la surface latérale de Σ par construction. Le flux du champ de vecteurs est donc le même à travers les surfaces identiquement orientées \vec{S}_1 et \vec{S}_2 .

Champ à flux conservatif

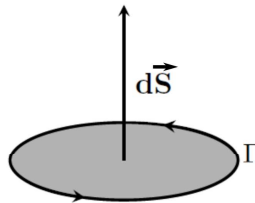
Tout champ de vecteurs à divergence nulle est à flux conservatif : son flux à travers toute surface fermée est nul, son flux est identique à travers toute section d'un tube de champ.

Ce résultat permet de faire des prédictions pour les champs vectoriels à flux conservatifs à partir des cartes de champ : dans des portions d'espace où les lignes de champ se resserrent, le champ doit avoir un module plus élevé.

5. Le rotationnel d'un champ vectoriel

5.1. Définition

On considère un champ vectoriel \vec{a} et une surface élémentaire $d\vec{S}$ associée à un point M de l'espace. On définit l'opérateur rotationnel en M à partir de la circulation élémentaire δC du champ le long du chemin fermé Γ délimitant $d\vec{S}$.



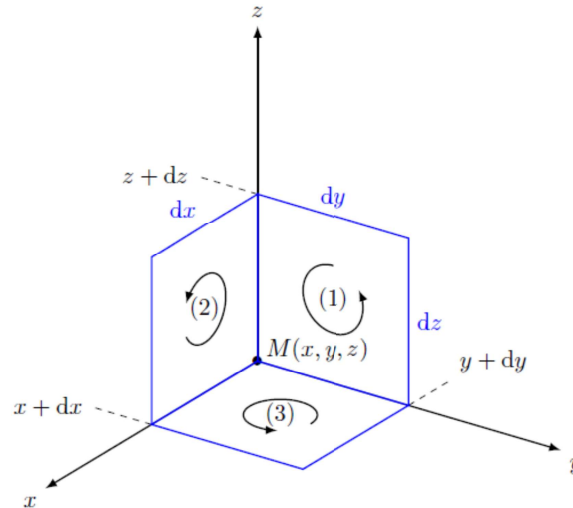
Définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel

L'opérateur rotationnel en M d'un champ vectoriel \vec{a} est défini par la relation

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \delta C.$$

La projection selon la normale à une surface élémentaire du rotationnel d'un champ vectoriel est égale à la circulation, par unité de surface, de ce champ le long du chemin associé. Il apparaît donc qu'un champ vectoriel dont le rotationnel est non nul en un point "effectue une rotation" autour de ce point puisque sa circulation le long de tout chemin fermé associé à ce point est non nulle. Cette définition permet de définir la composante de $\vec{\text{rot}} \vec{a}$ sur la direction normale à la surface dS . En prenant trois surfaces orthogonales dont les normales forment elles-mêmes un système orthogonal, on obtient les trois composantes de ce rotationnel. Considérons un cube élémentaire de volume $dx dy dz$ en un point $M(x, y, z)$ quelconque, et calculons la circulation de \vec{a} le long des chemins fermés constitués par les faces du cube. Orientons arbitrairement le chemin de la face 1. La convention d'orientation relative de la surface au chemin implique que la surface correspondante $d\vec{S}_1$ est orientée dans le sens des x croissants (règle de la main droite). Le chemin est constitué de deux paires de segments, de longueur dy dz aux abscisses z et $z + dz$, et dx aux abscisses y et $y + dy$.

D. Outils mathématiques



Sur les segments dy , seule la composante a_y du champ est utile dans le calcul de la circulation. De la même manière, le calcul sur les segments dz ne fait intervenir que la composante a_z . La circulation élémentaire δC_1 sur ce chemin est donc

$$\delta C_1 = a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y + dy, z)dz - a_y(x, y, z + dz)dy - a_z(x, y, z)dz$$

$$\delta C_1 = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz$$

soit

$$\delta C_1 = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x \cdot d\vec{S}_1.$$

D'après la définition intrinsèque du rotationnel, on en déduit la composante de $\vec{\text{rot}} \vec{a}$ suivant x

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot \vec{u}_x = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right).$$

De la même manière, le calcul de la circulation sur les faces (2) et (3) permet de déterminer les composantes du rotationnel suivant y et z

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot \vec{u}_y = \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right).$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot \vec{u}_z = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Il détermine ainsi l'expression analytique du rotationnel en coordonnées cartésiennes. Les expressions du rotationnel d'un champ \vec{a} sont plus délicates à trouver en coordonnées cylindriques et sphériques, et seront systématiquement données.

i Expression de l'opérateur rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

— en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z,$$

— en coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z,$$

— en coordonnées sphériques

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta a_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r a_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi,$$

5.2. Théorème de Stokes-Ampère

Le théorème résulte de la simple intégration sur un chemin fermé de la relation entre le rotationnel et la circulation élémentaire.

Théorème de Stokes-Ampère

La circulation le long d'un chemin fermé Γ d'un champ vectoriel est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface S s'appuyant sur ce chemin

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot d\vec{S}.$$

6. Opérateur Laplacien

On considère un champ scalaire f .

Définition intrinsèque du laplacien scalaire

Le laplacien scalaire, conventionnellement noté par le symbole Δ est défini par la relation

$$\Delta f = \text{div} \left(\vec{\text{grad}} f \right).$$

L'expression analytique du laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes se déduit immédiatement. Les expressions du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques et sphériques sont plus délicates à trouver et seront systématiquement données.

Expression de l'opérateur rotationnel dans les différents systèmes de coordonnées

— en coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

— en coordonnées cylindriques

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

— en coordonnées sphériques

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

Le laplacien vectoriel, noté conventionnellement Δ , transforme un vecteur en un vecteur. Son expression, en coordonnées cartésiennes, est

D. Outils mathématiques

Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes

$$\Delta \vec{a} = \Delta a_x \vec{u}_x + \Delta a_y \vec{u}_y + \Delta a_z \vec{u}_z.$$

Dans ce système de coordonnées, il suffit donc d'appliquer le laplacien scalaire à chacune des composantes du champ vectoriel initial. Contrairement aux autres opérateurs, le laplacien, qui doit son nom au mathématicien Laplace, n'a pas d'interprétation physique immédiate. On peut donner une identité qui le lie aux autres opérateurs précédemment définis et en donner ainsi une définition intrinsèque

Définition intrinsèque du Laplacien vectoriel

$$\Delta \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{a}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}).$$